# 底の変換公式

これをマスターすれば
対数計算は君のモノ♡

底の変換公式とは，**与えられた底を自分の好きな底に変える**ための公式で，一般に次のような式で表現されます．

▷Point◁（底の変換公式）

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

（底が $a$）⟶（底が $c$）

つまり，底が $a$ から $c$ に変わっているわけです．

**注** $c$ は $c>0$，$c \neq 1$ なら何でも OK です．

自分で証明できるようにしておこう

それではこれまで通り，この公式の証明から始めよう．　はーい

**証明** 分母をはらった式

$$\log_c a \times \log_a b = \log_c b$$

を証明する．$\log_c a = p$，$\log_a b = q$ とおくと，

$$c^p = a, \quad a^q = b$$

$c^p = a$ の両辺を $q$ 乗すると，$c^{pq} = a^q$．

$a^q = b$ より，$c^{pq} = b$．

$c^{pq} = b$

pq を1つにみて対数の定義を使う

よって

$$pq = \log_c b$$

$pq = \log_c b$

したがって

$$\log_c a \times \log_a b = \log_c b$$

が成立する．（証明終）

**注** 底の変換公式で $c=b$ として得られる式，

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

も記憶しておいたほうが良いでしょう．この式は**底と真数を入れ換えると逆数になる**ことを意味しています．このことを知っていれば，

$$\log_{64} 4 = \frac{1}{\log_4 64} = \frac{1}{\log_4 4^3} = \frac{1}{3}$$

などと計算できます．底より真数の方が大きいと何となく考えやすいので有効ですね．

最初に言ったように，底の変換公式とは，与えられた底を自分の好きな底に変換するための公式です．ていうか，それ以上でもそれ以下でもありません．　ふーん．それだけのことか…

**例 題** $\log_4 8$ を計算せよ．

**考え方** $\log_4 8$ の中の"4"も"8"も，どっちも"2の親戚"なので底を 2 に変換してみましょう．

**解**

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$$

うまい!!
ナルホドー

別に 2 に変換しなくても構いません．例えば底を 10 に変換しても同じ結果が得られます．

$$\log_4 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 2^2} = \frac{3\log_{10} 2}{2\log_{10} 2} = \frac{3}{2}$$

こっちでもできたー

**例 題** $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$ を計算せよ．

**考え方** 底が全然バラバラなので，とりあえず底を 10 でそろえてみました．もちろん $a$ や $b$ などの文字でそろえても構いません．

**解**

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$$

約分したよ

$$= \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \cdot \frac{\log_{10} c}{\log_{10} b} \cdot \frac{\log_{10} a}{\log_{10} c} = 1$$

**注** 底の変換公式の分母をはらった式

$$\log_c a \times \log_a b = \log_c b$$

ジーっ

を良く見ると，文字の順番に特徴があることに気づきます．ベクトルの加法の式 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ に似ているではありませんか．

ナルホドー
たしかにそうやわ

このイメージが頭にあれば，

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$$

も，$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA}$ とイメージでき，

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a a = 1$$

とすぐにわかります．これはなかなか使えそうなワザですね．

おもろ～

**例題** $\log_2 6 - \log_4 9$ を計算せよ．

**考え方** 公式 $\log_a M - \log_a N = \log_a \dfrac{M}{N}$ は底がそろってないと使えません．そこでまずは底をそろえることを考えます．"4"は"2 の親戚"なので底を 2 に変換してみましょう．

**解**

$$\begin{aligned}\log_2 6 - \log_4 9 &= \log_2 6 - \frac{\log_2 9}{\log_2 4}\\ &= \log_2 6 - \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}\\ &= \log_2 6 - \frac{2\log_2 3}{2}\\ &= \log_2 6 - \log_2 3\\ &= \log_2 2 = 1\end{aligned}$$

底がそろってないので どーしようもない

できた〜

別に 2 に変換しなくても構いません．例えば底を 10 に変換しても同じ結果が得られますが，やや計算が煩雑になります．やはり 2 にそろえた方が良さそうです．

$$\begin{aligned}\log_2 6 - \log_4 9 &= \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2} - \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 4}\\ &= \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2} - \frac{2\log_{10} 3}{2\log_{10} 2}\\ &= \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2} - \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}\\ &= \frac{\log_{10} 6 - \log_{10} 3}{\log_{10} 2}\\ &= \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 2} = 1\end{aligned}$$

さっきと比べると ちょっとだけ メンドウかも…

このへんは 慣れと経験やね

できた〜

**例題** $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 4)$ を計算せよ．

**解** とりあえず底を 10 に変換してみましょう．

$$\begin{aligned}&(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 4)\\ =&\left(\frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 2} + \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 8}\right)\left(\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} + \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 9}\right)\\ =&\left(\frac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 2} + \frac{\log_{10} 3}{3\log_{10} 2}\right)\left(\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} + \frac{2\log_{10} 2}{2\log_{10} 3}\right)\\ =&\left(\frac{7\log_{10} 3}{3\log_{10} 2}\right)\left(\frac{2\log_{10} 2}{\log_{10} 3}\right)\\ =&\frac{7}{3} \times 2 = \frac{14}{3}\end{aligned}$$

約分

慎重に計算しよう

このように全ての底を 10 でそろえてもできますが，前半の（　）内を底 2 でそろえ，後半の（　）内を底 3 でそろえてもできます．個人的にはこの方法が好きです．

2でそろえる　3でそろえる

$$\begin{aligned}&(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 4)\\ =&\left(\log_2 9 + \frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\log_3 2 + \frac{\log_3 4}{\log_3 9}\right)\\ =&\left(\log_2 3^2 + \frac{\log_2 3}{\log_2 2^3}\right)\left(\log_3 2 + \frac{\log_3 2^2}{\log_3 3^2}\right)\\ =&\left(2\log_2 3 + \frac{\log_2 3}{3}\right)\left(\log_3 2 + \frac{2\log_3 2}{2}\right)\\ =&\left(2\log_2 3 + \frac{1}{3}\log_2 3\right)(\log_3 2 + \log_3 2)\\ =&\frac{7}{3}\log_2 3 \times 2\log_3 2\\ =&\frac{7}{3} \times 2 = \frac{14}{3}\end{aligned}$$

お見事!! うまいことなってるー

**注** $\log_2 3 = \dfrac{1}{\log_3 2}$ なので，$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$ であることを利用しています．もちろんベクトルの加法的なイメージから $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 2 = 1$ と考えても構いません．

**例題** $\log_2 3 = a$，$\log_3 5 = b$ のとき，$\log_{20} 80$ を $a$，$b$ を用いて表せ．

**考え方** とりあえず，底を 2 に変換すると，

$$\begin{aligned}\log_{20} 80 &= \frac{\log_2 80}{\log_2 20}\\ &= \frac{\log_2(2^4 \cdot 5)}{\log_2(2^2 \cdot 5)}\\ &= \frac{\log_2 2^4 + \log_2 5}{\log_2 2^2 + \log_2 5}\\ &= \frac{4 + \log_2 5}{2 + \log_2 5}\end{aligned}$$

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ 加法の公式を逆に使っただけ

となり，$\log_2 5$ を $a$ と $b$ で表す必要がありますが，先ほどのベクトルの加法的なイメージがあれば，

$$\log_2 3 \times \log_3 5 = \log_2 5$$

この式が思いつくことがポイント

つまり，$\log_2 5 = ab$ となることはすぐにわかるので，

$$\log_{20} 80 = \frac{4 + ab}{2 + ab}$$

となります．

変換公式を自由自在に操れるようになると，対数計算の幅が広がります．しっかりと使いこなせるように練習しよう．

はへー!!