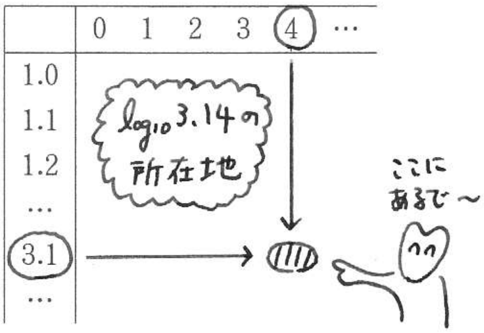
常用対数の利用

ブルックスが対数の発明者のネーピアに「底を10にした方がエエで〜」とアドバイスしたのが始まり。

1　常用対数の値

底が 10 の対数のことを常用対数といいます．「常用対数表」には $\log_{10} 1.00 \sim \log_{10} 9.99$ までの全ての値が載っていますが，もちろん，これらの値を暗記する必要はありません (問題文に書いてある)．



例えば，$\log_{10} 3.14$ の値を調べるには，図のように表の (IIII) の所の値を読みます．すると「.4969」となっています．これは「0.4969」のことです．つまり，$\log_{10} 3.14 = 0.4969$ であることがわかります．

言うまでもなく，このことは「10 を 0.4969 乗すれば 3.14 になる」という意味です．

$10^{0.4969} = 3.14$

特に重要な値は $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ です．なぜなら，**この 2 つの値から他の常用対数の値を作り出せるからです．**

とても重要な問題です

> **例題**　$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ の値を利用して，$\log_{10} 4$，$\log_{10} 5$，$\log_{10} 6$，$\log_{10} 8$，$\log_{10} 9$ の値を求めよ．

解

$\boxed{\log_{10} 4 \text{ の値}}$　$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$

☆ $\boxed{\log_{10} 5 \text{ の値}}$　$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

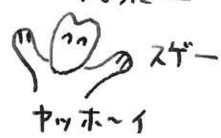
$\log_{10} 5$ の求め方に注意しよう

$\boxed{\log_{10} 6 \text{ の値}}$　$\log_{10} 6 = \log_{10}(2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$

$\boxed{\log_{10} 8 \text{ の値}}$　$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3\log_{10} 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$

$\boxed{\log_{10} 9 \text{ の値}}$　$\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2\log_{10} 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542$

いろいろ求まった〜



➾注　$\log_{10} 5$ の求め方だけ注意が必要です．$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 10 = 1$ がポイントです．

参考　「なんで $\log_{10} 7$ だけないの〜？」と思うかもしれません．確かに，$\log_{10} 2$ や $\log_{10} 3$ をどのように組み合わせても $\log_{10} 7$ は作れそうにありませんね．「やっぱり無理か〜」と諦めそうになりますが，なんと，実に巧妙な方法で $\log_{10} 7$ の値を小数第 2 位までなら計算することができるのです！

> **例題**　$48 < 49 < 50$ であることを利用して，$\log_{10} 7$ の値を小数第 2 位まで求めよ．

解　$48 < 49 < 50$ より，$\log_{10} 48 < \log_{10} 49 < \log_{10} 50$．

$\log_{10} 48 = \log_{10}(2^4 \times 3) = 4\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 4 \times 0.3010 + 0.4771 = 1.6811$

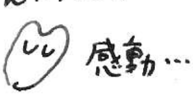
$\log_{10} 49 = \log_{10} 7^2 = 2\log_{10} 7$

$\log_{10} 50 = \log_{10} \dfrac{100}{2} = \log_{10} 100 - \log_{10} 2 = 2 - \log_{10} 2 = 2 - 0.3010 = 1.6990.$

よって，$1.6811 < 2\log_{10} 7 < 1.6990$ より，$0.84055 < \log_{10} 7 < 0.84950$．

したがって，$\log_{10} 7$ の小数第 2 位までの値は，$\log_{10} 7 = 0.84$ である．

実にうまい求め方…まさか $\log_{10} 7$ の値が作り出せるとは思わんかったな〜



➾注　$\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ から他の常用対数の値を作り出す作業は，大きい数字の最高位の数字を求めるときに必要になってきます．後ほど紹介します．

以下の問題では，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ の値だけを利用するものとします．

2　何桁の整数になるのかという問題

とにかく具体例で考えることが大切です

イメージしやすいネ

まずは，具体例で検証してみよう．

<u>N : 3 桁の整数の場合</u>

$$
\begin{aligned}
&N : 3\text{ 桁の整数}\\
\iff\ & 100 \leqq N \leqq 999\\
\iff\ & 100 \leqq N < 1000\\
\iff\ & 10^2 \leqq N < 10^3\\
\iff\ & \log_{10} 10^2 \leqq \log_{10} N < \log_{10} 10^3\\
\iff\ & 2 \leqq \log_{10} N < 3\\
\iff\ & \log_{10} N = 2.\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$\log_{10} N$ の整数部分が2になっています

<u>N : 4 桁の整数の場合</u>

$$
\begin{aligned}
&N : 4\text{ 桁の整数}\\
\iff\ & 1000 \leqq N \leqq 9999\\
\iff\ & 1000 \leqq N < 10000\\
\iff\ & 10^3 \leqq N < 10^4\\
\iff\ & \log_{10} 10^3 \leqq \log_{10} N < \log_{10} 10^4\\
\iff\ & 3 \leqq \log_{10} N < 4\\
\iff\ & \log_{10} N = 3.\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$\log_{10} N$ の整数部分が3になっています

✎注　つまり，大ざっぱに言えば，$\log_{10} N$ の整数部分に $+1$ すれば「N の桁数」になるのです．

以上の考察から次のことが分かります．

ナルホド～

▷Point◁

N : n 桁の整数

$\iff\ 10^{n-1} \leqq N < 10^n$

$\iff\ n-1 \leqq \log_{10} N < n$

例題　2^{100} は何桁の数か．

解　$\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2$
$= 100 \times 0.3010 = 30.10$

$30 \leqq \log_{10} 2^{100} < 31$ より，$10^{30} \leqq 2^{100} < 10^{31}$．

この不等式を必ず書くこと

よって 31 桁．

例題　10 乗すると 8 桁の整数になる自然数 N は？(常用対数表を用いてよい)

解　N^{10} が 8 桁の整数なので，$10^7 \leqq N^{10} < 10^8$

← 必ず書く!!

$$
\begin{gathered}
\log_{10} 10^7 \leqq \log_{10} N^{10} < \log_{10} 10^8\\
7 \leqq 10 \log_{10} N < 8\\
0.7 \leqq \log_{10} N < 0.8
\end{gathered}
$$

常用対数表を見て，$\log_{10} N$ が上記範囲内にある N を探すと，$N = 6$．

いずれにしても不等式できちんと表現することが大切です

ばーい

3　最高位の数字と一の位の数字を求める問題

例題　18^{50} の最高位の数字と一の位の数字を求めよ．

考え方　とりあえず常用対数をとってみますが，そもそもこの値が何を意味しているのかを考えれば，最高位の数字のヒントが分かるはずです．

一の位の数字を求めるには，対数の知識は全く不要．周期性に注目します．

解　$\log_{10} 18^{50} = 50(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3)$
$= 50(0.3010 + 2 \times 0.4771) = 62.76$

このことはすなわち，$18^{50} = 10^{62.76}$ であることを意味している．$10^{62.76} = 10^{62} \times 10^{0.76}$ であり，$10^0 < 10^{0.76} < 10^1$ だから，$10^{0.76}$ の整数部分は 1 桁の整数である．この整数部分が 18^{50} の最高位の数字に他ならない．

← とても重要なポイントです

$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.7781$

$0.6990 < 0.76 < 0.7781$ なので，$5 < 10^{0.76} < 6$．

よって，$10^{0.76}$ の整数部分の数字は 5．つまり，18^{50} の最高位の数字は 5 である．

やったー

お見事!!