次に，一の位の数字を考えるために，18^1，18^2，18^3，… の一の位の数字を順番に書き並べてみると，

コツコツ計算して自分で周期性を発見します

$$8,\ 4,\ 2,\ 6,\ 8,\ 4,\ 2,\ 6,\ 8,\ \cdots$$

つまり，$8 \to 4 \to 2 \to 6$ と周期 4 でくり返していることがわかる．したがって，50 を 4 で割った余りは 2 なので，18^{50} の一の位の数字は 4 である．

はーい

■

注　たいてい問題文には $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ の値しか与えられてないので，自分で $\log_{10} 4$〜$\log_{10} 9$ の値をその場で作って調べる必要があります．最初の 例題 の内容がここで活きてくるわけです．

自分で調べるのネ　うー

注　「周期が 4 であること」は時間的余裕があれば証明しておこう．次のようにします．

▷Point◁

> 2 つの数 M と N の一の位の数字が等しい
> $\iff$ $M-N$ が 10 で割り切れる

従って，18^n の一の位の数字の周期が 4 であることを言うには，18^1, 18^2, 18^3, 18^4 の一の位の数字が全て異なっていることを示した上で，18^{n+4} と 18^n の一の位の数字が等しい，すなわち，$18^{n+4} - 18^n$ が 10 の倍数であることを示せばよいのです．

ここから先は自分で計算してください．分からなければ必ず質問に来ること．合同式を利用してもかまいません．いずれにしろ整数問題の知識が必要でしょう．

はーい　すぐに質問に行きまーす．

4　小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるのかという問題

やっぱり具体例です　はーい

まずは，具体例で検証してみよう．

N：小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れる

$$\begin{aligned}
&N：\text{小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れる}\\
\iff\ & 0.001 \leqq N \leqq 0.00999\cdots\cdots\\
\iff\ & 0.001 \leqq N < 0.01\\
\iff\ & 10^{-3} \leqq N < 10^{-2}\\
\iff\ & \log_{10} 10^{-3} \leqq \log_{10} N < \log_{10} 10^{-2}\\
\iff\ & -3 \leqq \log_{10} N < -2\\
\iff\ & \log_{10} N = -3,\ \text{または}\ \log_{10} N = -2.\cdots\cdots
\end{aligned}$$

N：小数第 4 位に初めて 0 でない数字が現れる

$$\begin{aligned}
&N：\text{小数第 4 位に初めて 0 でない数字が現れる}\\
\iff\ & 0.0001 \leqq N \leqq 0.000999\cdots\cdots\\
\iff\ & 0.0001 \leqq N < 0.001\\
\iff\ & 10^{-4} \leqq N < 10^{-3}\\
\iff\ & \log_{10} 10^{-4} \leqq \log_{10} N < \log_{10} 10^{-3}\\
\iff\ & -4 \leqq \log_{10} N < -3\\
\iff\ & \log_{10} N = -4,\ \text{または}\ \log_{10} N = -3.\cdots\cdots
\end{aligned}$$

以上の考察から次のことが分かります．

▷Point◁

> N：小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れる
> $\iff$ $10^{-n} \leqq N < 10^{-(n-1)}$
> $\iff$ $-n \leqq \log_{10} N < -(n-1)$

> 例題　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．

解　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100} = 100\log_{10}\dfrac{1}{3}$

$= 100\times(-0.4771) = -47.71$

$-48 \leqq \log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100} < -47$ より，

$10^{-48} \leqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{100} < 10^{-47}$．よって小数第 48 位．

不等式を必ず書くこと．

> 例題　0.4^n が小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れるような自然数 n は？

解　0.4^n が小数第 3 位に初めて 0 でない数が現れるので，$10^{-3} \leqq 0.4^n < 10^{-2}$ が成立する．よって，

$$\begin{gathered}
\log_{10} 10^{-3} \leqq \log_{10} 0.4^n < \log_{10} 10^{-2}\\
-3 \leqq n\log_{10} 0.4 < -2\\
-3 \leqq n\log_{10}\frac{4}{10} < -2\\
-3 \leqq n(\log_{10} 4 - \log_{10} 10) < -2\\
-3 \leqq n(2\times 0.3010 - 1) < -2\\
-3 \leqq n(-0.398) < -2\\
\frac{3}{0.398} \geqq n > \frac{2}{0.398}\\
7.57\cdots \geqq n > 5.02\cdots
\end{gathered}$$

よって，$n = 6,\ 7$．

先ほどと同じように不等式できちんと表現することが大切!!　はーい

常用対数を使うといろんなことがわかって便利やなー

5　入試問題紹介

ガンバルぞ〜

常用対数を利用した問題は，ほとんどが桁数や最高位の数を求める定番モノなんですが，さすがに入試問題となるとちょっとした工夫が必要になってきます．甘く見てるとなかなか手ごわいので参考までに紹介しよう．

演習　初項が 2，公比が 3 である等比数列で，初項から第何項までの和が初めて 10000 より大きくなるか．

考え方　入試問題ではなく 4STEP の『数列』分野の問題．そのまま式を立てるとうまく計算できません．「1 くらいズレても影響なし」という大雑把な感覚が求められます．

解　$S_n = \dfrac{2(1-3^n)}{1-3} = 3^n - 1$.

$3^n > 10000$ となる最小の n は，

$\log_{10} 3^n > \log_{10} 10000$ より，$n \log_{10} 3 > 4$.

$n > \dfrac{4}{\log_{10} 3} = \dfrac{4}{0.4771} = 8.38\cdots$ より，$n = 9$.

よって，$3^8 - 1 = 6560$, $3^9 - 1 = 19682$ なので，第 9 項までの和が初めて 10000 を超える．

■

注　$3^n - 1 > 10000$ としてしまうと，$3^n > 10001$ となり，$\log_{10} 10001$ が計算できません．だから，まずは $3^n > 10000$ を考えて様子を見たわけです．これが「1 くらいズレても影響なし」という大雑把な感覚です．しかし，$3^n > 10000$ から得た結果が $3^n - 1 > 10000$ を満たしていることを最後に確認することを忘れないようにしよう．

はーい

演習　2012 年 摂南大 (理系)

(1)　2^n が 10 桁の数となる正の整数 n を全て求めよ．

(2)　$2^n + 3^n$ が 10 桁の数となる正の整数 n を全て求めよ．

考え方　(1) は問題ないでしょう．(2) は，そのまま常用対数を取ると $\log_{10}(2^n + 3^n)$ となって計算できません．ここでも「大雑把な感覚」が必要になってくるでしょう．例えば $2^{10} = 1024$ ですが $3^{10} = 59049$ です．つまり n が大きいとき 2^n よりもの 3^n の方が圧倒的に大きくなるので，$2^n + 3^n$ の桁数は 3^n の桁数で決まるはずです．

解　(1)　2^n が 10 桁の数のとき，

$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$.　　$9 \leqq n \log_{10} 2 < 10$.

$\dfrac{9}{0.3010} \leqq n < \dfrac{10}{0.3010}$.　$29.9\cdots \leqq n < 33.2\cdots$.

よって，$n = 30, 31, 32, 33$.

これは楽勝　よゆー

(2)　$2^n + 3^n$ が 10 桁の数のとき，

$10^9 \leqq 2^n + 3^n < 10^{10}$.

$10^9 \leqq 2^n + 3^n < 2 \cdot 3^n$, $3^n \leqq 2^n + 3^n < 10^{10}$.

$9 < \log_{10} 2 + n \log_{10} 3$,　$n \log_{10} 3 < 10$,

$\dfrac{9 - \log_{10} 2}{\log_{10} 3} < n < \dfrac{10}{\log_{10} 3}$.

$\dfrac{8.699}{0.4771} < n < \dfrac{10}{0.4771}$.

$18.2\cdots < n < 20.9\cdots$.　よって，$n = 19, 20$.

？？？　このへんがムズい…

3^{20} の最高位の数を調べる．

$\log_{10} 3^{20} = 20 \log_{10} 3 = 20 \cdot 0.4771 = 9.542$

$3^{20} = 10^{9.542} = 10^9 \cdot 10^{0.542}$

$\log_{10} 4 = 2 \log_{10} 2 = 2 \cdot 0.3010 = 0.6020$ より，

$\log_{10} 3 < 0.542 < \log_{10} 4$.　$\therefore$　$3 < 10^{0.542} < 4$

よって 3^{20} は最高位が 3 の 10 桁の数である．

次に，2^{20} の桁位の数を調べる．

$\log_{10} 2^{20} = 20 \log_{10} 2 = 20 \cdot 0.3010 = 6.02$

よって，2^{20} は 7 桁の数でしかない．3^{20} に 2^{20} を加えても 10 桁の数である．

やっぱり 2^{20}は影響なし

同様に，3^{19} は最高位が 1 の 10 桁の数で 2^{19} は 6 桁の数なので，$3^{19} + 2^{19}$ も 10 桁の数のままである．

よって，$2^n + 3^n$ が 10 桁の数となる n は

$n = 19, 20$.

なるほど　ムズいけどおもしろい…

■

注　(2) について．$2^n + 3^n$ の桁数は 3^n で決まるんだから，3^n が 10 桁になる場合を考えて，

「$10^9 \leqq 3^n < 10^{10}$ より，$\dfrac{9}{\log_{10} 3} \leqq n < \dfrac{10}{\log_{10} 3}$.

$\dfrac{9}{0.4771} \leqq n < \dfrac{10}{0.4771}$.　$18.8\cdots \leqq n < 20.9\cdots$.

よって，$n = 19, 20$」とする人がいますがダメです．これだと，「3^n は 9 桁の数だが 2^n を加えることで 10 桁になる場合」を考えてないからです．あくまでも「$3^n + 2^n$ が 10 桁の数である」という不等式から始めねばなりません．

そーゆーことか…