

エピソードとバイバインの解答

以下の問題では、常用対数表を用いてよいものとする。

問題 4STEP 問題集を何回折れば富士山の高さに到達できるのだろうか？

- (ア) 30 回くらい
(イ) 300 回くらい
(ウ) 3000 回くらい

解 200 ページ (紙 100 枚) あたり約 1 cm だから、紙 1 枚は $\frac{1}{100}$ cm.

1 回折ると 2 枚、2 回折ると 4 枚、3 回折ると 8 枚 … だから、 n 回折ると 2^n 枚重なることになる。したがって、 n 回折った時の重なった紙の厚さは $2^n \times \frac{1}{100}$ cm.

富士山の高さは

$$3776 \text{ m} \approx 3780 \text{ m} = 3780 \times 100 \text{ cm} = 3.78 \times 10^5 \text{ cm}$$

なので、

$$\frac{2^n}{100} > 3.78 \times 10^5$$

すなわち

$$2^n > 3.78 \times 10^7$$

を満たす最小の自然数を求めればよい。

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 2^n > \log_{10} (3.78 \times 10^7)$$

$$\log_{10} 2^n > \log_{10} 3.78 + \log_{10} 10^7$$

$$n \log_{10} 2 > \log_{10} 3.78 + 7$$

$$0.3010 \times n > 0.5775 + 7$$

$$n > \frac{7.5775}{0.3010} = 25.17\dots$$

この式を満たす最小の自然数は $n = 26$ 。

したがって、26 回折れば富士山の高さ (3776m) を超える。

問題 赤阪くんは 1 ヶ月後までに、総額いくらのお小遣いをもらうことができるか？

- (ア) 100 万円くらい
(イ) 1 億円くらい
(ウ) 10 億円以上

解 1 日目が 1 円、2 日目が 2 円、3 日目が 4 円、4 日目が 8 円 …、なので、 n 日目には 2^{n-1} 円の金額をもらう。したがって、初日から n 日までのお小遣いの総額は、

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1(1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1$$

なので $2^n - 1$ 円である (等比数列の和の公式を利用した)。

従って、1 ヶ月後 (30 日後としよう) のお小遣いの総額は

$$\begin{aligned} & 2^{30} - 1 \\ & = 1073741824 - 1 \\ & = 1073741823 \text{ 円} \\ & = 10 \text{ 億 } 7374 \text{ 万 } 1823 \text{ 円} \end{aligned}$$

よって、10 億円以上得ることになる。

注 おおよそでよければ、 $2^{10} = 1024 \approx 1000$ と考えれば

$$2^{30} - 1 \approx 2^{30} \approx (2^{10})^3 \approx 1000^3 = 1000000000$$

となって、ざっと、10 億円になることが簡単に分かります。

問題 1 時間後には何人くらいがうわさを知ることになるだろうか？

- (ア) 約 200 人
(イ) 約 2000 人
(ウ) 約 20000 人

10 分後に噂を聞いた人は 5 人, 20 分後に新たに噂を聞いた人は $5^2 = 25$ 人, 30 分後では $5^3 = 125$ 人, 従って 1 時間後に噂を知っている人は,

$$\begin{aligned} & 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 \\ &= \frac{1(1 - 5^7)}{1 - 5} \\ &= \frac{5^7 - 1}{4} \\ &= 19531 \text{ 人} \end{aligned}$$

問題 では, 2 時間後には何人くらいがうわさを知ることになるだろうか？

- (ア) 奈良県の人口くらい (約 140 万人)
(イ) 日本の人口くらい (約 1 億 2000 万人)
(ウ) アメリカの人口くらい (約 3 億 2000 万人)

解 先ほどと同様に考えて

$$\begin{aligned} & 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{11} + 5^{12} \\ &= \frac{1(1 - 5^{13})}{1 - 5} \\ &= \frac{5^{13} - 1}{4} \\ &= 305175781 \end{aligned}$$

注 1 時間後に 2 万人だったのが, そのさらに 1 時間後には 3 億人を超えました. 指数関数が一気に増えることが分かりますね. 指数関数おそろべしです.

<ドラえもん『バイバイン』の問題>

栗まんじゅうが地球を覆い尽くすのは何時間後か.

解

栗まんじゅうの大きさが直径 4cm の円だとすると, 面積は $4\pi \text{ cm}^2$

地球の半径は

$$6370 \text{ km} = 6370 \times 10^3 \text{ m} = 6370 \times 10^5 \text{ cm} = 6.37 \times 10^8 \text{ cm}$$

だから, 表面積は

$$(6.37 \times 10^8)^2 \pi = 6.37^2 \times 10^{16} \times \pi \text{ cm}^2$$

したがって, 地球の表面を覆い尽くす栗まんじゅうの個数は

$$\frac{6.37^2 \times 10^{16} \times \pi}{4\pi} = \frac{6.37^2}{4} \times 10^{16} \text{ 個}$$

$5x$ 分後に地球を覆い尽くすとすると, 饅頭の個数は

$$2^x > \frac{6.37^2}{4} \times 10^{16}$$

すなわち

$$2^{x+2} > 6.37^2 \times 10^{16}$$

を満たす最小の x を求めればよい. 両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{x+2} > \log_{10} (6.37^2 \times 10^{16})$$

$$(x+2) \log_{10} 2 > 2 \log_{10} 6.37 + \log_{10} 10^{16}$$

$$(x+2) \times 0.3010 > 2 \times 0.8041 + 16$$

$$x+2 > \frac{17.6081}{0.3010} = 58.499\dots$$

$$x > 56.499\dots$$

この式を満たす最小の自然数は $x = 57$.

したがって, 5×57 分後, すなわち, 4 時間 45 分後に栗まんじゅうが地球を覆い尽くす.

注 この議論は厳密にはちょっとおかしい. なぜなら円を普通に敷き詰めると円と円の間隙が出来るので, 地球を完全に覆い尽くすには単純に個数だけを考えればよいというものではありません. まっ, 「だいたい 5 時間」ということにしといてください.