対数の基礎

基礎が大切!! そもそも対数って何?

先生「$2^x=4$ となる x は何かな？」　A 君「$x=2$ で〜す．当たり前のこと聞かないでくださいよ〜」
先生「$2^x=8$ となる x は何かな？」　B 君「$x=3$ です！　ひょっとして僕たちのことナメてます？」
先生「じゃあ，$2^x=6$ となる x は？」 C 君「え〜っ，わからん …… ていうか，なんで僕だけなん？」

つまり，$2^x=6$ をみたす x は表現のしようがないから ($x=3$ じゃないよ)，新たな記号 log を導入するのです．新たな記号には新たなルールがあります．このルールを正しく身につけることが目標です．

はーい

すべては次の関係から始まります．

▷Point◁(対数の定義)

$$a^p=M \iff p=\log_a M$$

(指数の世界)　　(対数の世界)

ただし，$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$

注　a を底，M を真数といいます．特に，

真数は常に正である

ことがとても重要で，今後あらゆる場面でこの真数に関する条件が登場するでしょう．

よって，先ほどの会話で「$2^x=6$ となる x」は「$x=\log_2 6$」となります．つまり，$\log_2 6$ とは「2 を何乗したら 6 になるのか」という指数を表しているに過ぎません．$2^2=4$，$2^3=8$ なので，$\log_2 6$ は 2 と 3 の間の何らかの数になりますね (具体的にどんな数になるのかは後ほどわかります)．

さて，「$\log_a a^p$」とは「a を何乗すれば a^p になるか」と言うことなので答えは「p 乗」．よって

$$\log_a a^p=p$$

となります．この関係式で $p=1,\ 0,\ -1$ の場合は特に重要なので覚えておこう．

$$\log_a a=1,\quad \log_a 1=0,\quad \log_a\frac{1}{a}=-1$$

対数には次の計算ルールがあります．

▷Point◁

ルール①　$k\log_a M=\log_a M^k$
ルール②　$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$
ルール③　$\log_a M-\log_a N=\log_a \dfrac{M}{N}$

これらのルールは全て**対数の定義**から証明できます．必ず自分で証明できるようになっておこう．

$\boxed{\text{ルール①の証明}}$

$\log_a M=p$ とおくと対数の定義より，
$a^p=M$．この両辺を k 乗して

$$a^{kp}=M^k$$

$a^{kp}=M^k$　ここをひとまとめにみて対数の定義を使う

したがって，

$$kp=\log_a M^k$$

よって，$k\log_a M=\log_a M^k$ が成立する．

フムフム

注　この公式は**対数の前の数字は真数の指数に上げれるあるいは真数の指数は対数の前に下ろせる**ということを意味しています．このことは対数の計算で重要な役割を果たすことになります．

上げたり下げたりできるのね〜

$$k\log_a M=\log_a M^k$$

たのしー

特に次の 2 つは代表的な例ですが，$\dfrac{1}{N}=N^{-1}$，$\sqrt[n]{M}=M^{\frac{1}{n}}$ であることを知っていれば，当たり前すぎて覚えるまでもないでしょう．

$$\log_a\frac{1}{N}=-\log_a N,\quad \log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$$

【例】
$$\log_3 81=\log_3 3^4=4\log_3 3=4$$
$$\log_5\frac{1}{25}=\log_5 5^{-2}=-2\log_5 5=-2$$
$$\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$$
$$\log_3\sqrt[4]{27}=\log_3 27^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\log_3 27=\frac{1}{4}\log_3 3^3=\frac{3}{4}\log_3 3=\frac{3}{4}$$

いずれも，ルールに従った機械的な方法で計算しています．単なる手の運動と思えるようになってほしい．

はーい
がんばりま〜す

ルール ②③ の証明

$\log_a M = p$, $\log_a N = q$ とおくと,

$$a^p = M, \quad a^q = N \quad \cdots(\star)$$

したがって, $(\star)$ を辺々かけると,

$$a^p \times a^q = M \times N$$

つまり, $a^{p+q} = MN$. したがって,

$$p + q = \log_a MN$$

次に, $(\star)$ を辺々割ると,

$$a^p \div a^q = M \div N$$

つまり, $a^{p-q} = \dfrac{M}{N}$. したがって,

$$p - q = \log_a \frac{M}{N}$$

以上より,

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$$
$$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

が成立する.

✎注 底が a で共通であることに注意しよう.
底がそろっていないとルール ②③ は使えません.

底が違うとルールが使えない

これは要注意や

【例】

$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2\times 5) = \log_{10} 10 = 1$

$\log_2 3 - \log_2 12 = \log_2 \dfrac{3}{12} = \log_2 \dfrac{1}{4} = -2$

対数の計算は対数の定義とルール ①②③ の組み合わせに過ぎないのですが, その計算方法には 3 つの流派があり, この流派をうまく使い分けることがコツです.

▷Point◁(対数計算の 3 つの流派)

あげ派 ↗	とにかく対数の前にある数字を真数の指数に上げてしまう流派
さげ派 ↙	とにかく真数の指数を対数の前に下げてしまう流派
あげさげ派 ↗↙	「あげ派」と「さげ派」をうまく使い分けるミックス流派

それでは, 3 つの流派の代表的な解答例を紹介しよう. この 3 問でコツをつかんで欲しい.

ぼくはあげさげ派

例 題 (あげ派流解法)

$$\begin{aligned}
&6\log_2 \sqrt[3]{3} - \log_2 18 \\
&= 6\log_2 3^{\frac{1}{3}} - \log_2 18 \\
&= \log_2 \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 - \log_2 18 \\
&= \log_2 3^2 - \log_2 18 \\
&= \log_2 9 - \log_2 18 \\
&= \log_2 \frac{9}{18} \\
&= \log_2 \frac{1}{2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

“6”を真数の指数にあげる

例 題 (さげ派流解法)

$$\begin{aligned}
&\log_5 \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{12} - \frac{3}{2}\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \\
&= \log_5 2^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{12} - \frac{3}{2}\log_5 \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{2}\log_5 2 + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{12} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\log_5 \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{2}\log_5 2 + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{12} - \frac{1}{2}\log_5 \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{2}\left(\log_5 2 + \log_5 \frac{25}{12} - \log_5 \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log_5 \left(2 \times \frac{25}{12} \div \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log_5 25 \\
&= \frac{1}{2}\log_5 5^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

“$\frac{1}{2}$” “$\frac{1}{3}$”を対数の前にさげる

例 題 (あげさげ派流解法)

$$\begin{aligned}
&\log_3 \sqrt[3]{12} - \frac{2}{3}\log_3 2 \\
&= \log_3 12^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\log_3 2 \\
&= \frac{1}{3}\log_3 12 - \frac{2}{3}\log_3 2 \\
&= \frac{1}{3}\log_3 12 - \frac{1}{3}\log_3 2^2 \\
&= \frac{1}{3}(\log_3 12 - \log_3 4) \\
&= \frac{1}{3}\log_3 \frac{12}{4} \\
&= \frac{1}{3}\log_3 3 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

“$\frac{1}{3}$”を対数の前にさげる

$\frac{2}{3}$のうち“2”だけを真数の指数にあげる

うまいことなってるなー

もちろん, それぞれの流派にこだわらず自由に解いて構いません. あくまでも今回は 3 つの流派の特徴を知ってもらうために紹介しました.