赤阪正純 (http://inupri.web.fc2.com)

部分分数に分けよう

なんで分けるんかなー
きっと何かエエことがあるから
分けるんやろなー

$\dfrac{1}{2\times3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2\times5}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)$ などのように分数を 2 つの分数に分解することを「部分分数に分ける」といいます．分数タイプの $\sum$ 計算をするときは，部分分数に分けてから足し合わせると上手くいく場合が多いのです．また，この「部分分数に分ける」という方法は $\sum$ 計算のみならず，数学 III の積分計算においてもよく使われる計算テクニックなので，理系の人は特に重要です．

▷Point◁

☆部分分数に分ける方法☆

→ カンでテキトーに分けて，あとから微調整

具体例で，部分分数への分け方を解説しよう．

例えば $\dfrac{2}{k(k+3)}$ ……（※）を部分分数に分ける場合，以下の手順に従います．

$\boxed{\text{Step ①}}$ とりあえず，$\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+3}$ とテキトーに分けてみる．

テキトー
大好き ♡

$\boxed{\text{Step ②}}$ 通分すると，$\dfrac{3}{k(k+3)}$ となるので，（※）とズレてしまう．

$\boxed{\text{Step ③}}$ よって，（※）に一致するように，$\dfrac{2}{3}$ 倍して微調整する．つまり，

$$\frac{2}{k(k+3)}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)\times\frac{2}{3}$$

と部分分数に分けることができます．

やったネ
完了!!

【例】 部分分数に分けよ．

$$\frac{1}{(k+1)(k+4)},\quad \frac{2}{k^2(k^2+1)},\quad \frac{1}{k^2-1}$$

考え方 まずは思い切って分けてみること．微調整すれば大丈夫．

解

$$\frac{1}{(k+1)(k+4)}=\underbrace{\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+4}\right)}_{\text{テキトーに分けて}}\times\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{微調整}}$$

$\dfrac{3}{(k+1)(k+4)}$

$$\frac{2}{k^2(k^2+1)}=\underbrace{\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+1}\right)}_{\text{テキトーに分けて}}\times\underbrace{2}_{\text{微調整}}$$

$\dfrac{1}{k^2(k^2+1)}$

$$\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{(k+1)(k-1)}$$

$\dfrac{2}{(k-1)(k+1)}$

$$=\underbrace{\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)}_{\text{テキトーに分けて}}\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{微調整}}$$

分母を因数分解します

⇨注 分母が 2 つの積の場合は，次の関係式を思い描くとわかりやすいかもしれません．

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{B-A}{AB}$$

分母 AB の差 $B-A$ が分子になっていることに注目しよう．この関係を知っていれば，例えば，

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}$$

差が 1　分母の差が分子に等しい

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

← $(k+1)^2-k^2=2k+1$
分母の差が分子になります

などは，分母の差がそのまま分子になっているので，すぐに部分分数に分けれます．

$\boxed{\text{分母が 3 つの積 } ABC \text{ の場合}}$ ← ごくたまに登場します。

最初の 2 個の積 AB と最後の 2 個の積 BC を分母にして分けます（当然，微調整も必要です）．

▷Point◁

$$\frac{1}{ABC}=\left(\frac{\triangle}{AB}-\frac{\triangle}{BC}\right)\times\boxed{}$$

前2つ，後2つ で考えます

【例】 $\dfrac{1}{k(k+2)(k+4)}$

$$=\left\{\frac{1}{k(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+4)}\right\}\times\frac{1}{4}$$

最初の2つと
最後の2つに
テキトーに
分けて
微調整

参考 分母が 4 つ以上の積の場合も（ほとんど登場しませんが），同じノリでできます．

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

最初の3つと最後の3つで分けます。

$$=\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}\times\frac{1}{3}$$

お見事!!

感動…

次の数列の和を計算せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+4k+3}$ (4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

考え方 部分分数に分けて縦書きで計算します．絶対に縦書きです．縦書きに限ります．

なんで〜？

解 (1) $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ より，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

縦書きって便利やな〜

$$\begin{array}{ccll}
\boxed{\frac{1}{1}} & - & \cancel{\frac{1}{2}} & (k=1)\\
\cancel{\frac{1}{2}} & - & \cancel{\frac{1}{3}} & (k=2)\\
\cancel{\frac{1}{3}} & - & \cancel{\frac{1}{4}} & (k=3)\\
\cdots & & \cdots & \\
\cancel{\frac{1}{n-1}} & - & \cancel{\frac{1}{n}} & (k=n-1)\\
\cancel{\frac{1}{n}} & - & \boxed{\frac{1}{n+1}} & (k=n)
\end{array}$$

ナナメが打ち消し合ってキャンセルされています。左上と右下に1コずつ残っています。

(2) $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\left(\dfrac{1}{3k-2}-\dfrac{1}{3k+1}\right)\times\dfrac{1}{3}$

より，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)\times\frac{1}{3}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3n+1}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3n+1}$$

微調整を忘れないように…

縦書き大好き♡

$$\begin{array}{ll}
\left(\boxed{\frac{1}{1}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)\times\frac{1}{3} & (k=1)\\
\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)\times\frac{1}{3} & (k=2)\\
\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)\times\frac{1}{3} & (k=3)\\
\cdots & \cdots\\
\left(\cancel{\frac{1}{3n-5}}-\cancel{\frac{1}{3n-2}}\right)\times\frac{1}{3} & (k=n-1)\\
\left(\cancel{\frac{1}{3n-2}}-\boxed{\frac{1}{3n+1}}\right)\times\frac{1}{3} & (k=n)
\end{array}$$

(1)と同様にナナメが消えます。左上と右下に1コずつ残ります。

(3) $\dfrac{1}{k^2+4k+3}=\dfrac{1}{(k+1)(k+3)}$
$=\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)\times\dfrac{1}{2}$ より，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$$

これは注意が必要やな…

微調整を忘れないように…

$$\begin{array}{ll}
\left(\boxed{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)\times\frac{1}{2} & (k=1)\\
\left(\boxed{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)\times\frac{1}{2} & (k=2)\\
\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)\times\frac{1}{2} & (k=3)\\
\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)\times\frac{1}{2} & (k=4)\\
\cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots\\
\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)\times\frac{1}{2} & (k=n-2)\\
\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\boxed{\frac{1}{n+2}}\right)\times\frac{1}{2} & (k=n-1)\\
\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\boxed{\frac{1}{n+3}}\right)\times\frac{1}{2} & (k=n)
\end{array}$$

(1)(2)とは違って今回は2コとばしで消えています。左上と右下に2コずつ残ります。

(4) $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)}$
$=\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ より，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$
$$=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

やっぱり縦書き サイコー

最初の2つと最後の2つで分けます…

$$\begin{array}{ccll}
\boxed{\frac{1}{1\cdot2}} & - & \cancel{\frac{1}{2\cdot3}} & (k=1)\\
\cancel{\frac{1}{2\cdot3}} & - & \cancel{\frac{1}{3\cdot4}} & (k=2)\\
\cancel{\frac{1}{3\cdot4}} & - & \cancel{\frac{1}{4\cdot5}} & (k=3)\\
\cdots & & \cdots & \\
\cdots & & \cdots & \\
\cancel{\frac{1}{(n-1)n}} & - & \cancel{\frac{1}{n(n+1)}} & (k=n-1)\\
\cancel{\frac{1}{n(n+1)}} & - & \boxed{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} & (k=n)
\end{array}$$

今回が3つの積の場合においても前2つ，後2つで分けると全く同じ。

縦書きすれば打ち消し合う様子や残る部分がとてもよくわかります。

だから縦書きするのね

ナットク