群数列の考え方

～典型的な３問からコツを学ぼう～

群数列の問題を苦手とする人が多いようです．というのも，あまりにも多種多様な問題のパターンがあるため，「こうすれば解ける」という決定打に欠けるからでしょう．

そうやねんな….
何からやってエエかわからんもん…

群数列の問題で主に問われるのは，

① 与えられた数字が第何群の何番目にあるのか？

② 最初から数えて○○番目にある数字は，第何群の何番目の数字か？それは何か？

③ 各群の和を求めるには？

ということです．そのためには，**第 n 群の様子を正確に把握すること**が重要になってきます．

もっと突き詰めていうと，**第 n 群の最初の数がもとの数列の第何番目になるのか？**が分かれば，ある程度のことはたいてい解決します．

▷Point◁（第 n 群の把握の仕方）

まずは，第１群～第 $n-1$ 群の間に全部で何個あるのかを数える．
そうすれば，第 n 群の最初の数がもとの数列の第何番目になるのかがわかる．
また，第 n 群の最後の数は，第 $n+1$ 群の最初の数字の１個手前と考えると便利である．

いずれにしても，典型的な問題を通して，やり方に慣れることが大切です．以下の３問でコツをつかもう．

うん

例題　自然数の列を，次のように１個，２個，４個，……，2^{n-1} 個，…… の順に分ける．

$$1 \mid 2,\ 3 \mid 4,\ 5,\ 6,\ 7 \mid 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15 \mid 16 \quad \cdots$$

ベースとなる数列はフツーの自然数です

ラッキー

(1) 第 n 群の最初の自然数を求めよ．
(2) 500 は第何群の第何項か．
(3) 第 n 群にあるすべての自然数の和を求めよ．

考え方　次のように縦に並び替えます．

縦書きします!!

第１群	1								→ １個
第２群	2	3							→ ２個
第３群	4	5	6	7					→ ４個
第４群	8	9	10	11	12	13	14	15	→ ８個
…	…								

やったー

平面的に並べることで，各項を考えるとき，「上から○○段目で，左から△△番目」というように２つの方向から見ることになり，群数列全体の把握がしやすくなります。
だからぼくは縦書きをオススメします。

ナルホド～

この配列をしっかり見て，規則性を把握します．n 段目にはどのような数が並んでいるのでしょうか？

まず各群の最初の数に注目すると，

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$$

なので，第 n 群目の最初の数が 2^{n-1} であることはすぐに分かります．しかしながらこれはあくまでも予想に過ぎません．

アカンの？

エ～ッ

問題文で与えられた条件は「１個，２個，４個，……，2^{n-1} 個，…… の順に分ける」ということなので，この情報しか使ってはいけないのです．

べつにエエやん…

したがって，予想ではなく数学的に正しく論証するには，第１群～第 $n-1$ 群の終わりまでに含まれる数の個数が

等比数列の和

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-2}=\frac{1(1-2^{n-1})}{1-2}=2^{n-1}-1\ \text{個}$$

であることを示します．元の数列が単なる自然数の列なので，第 $n-1$ 群の最後の数が $2^{n-1}-1$ であることが分かり，さらに，第 n 群の初めの数は，第 $n-1$ 群の最後の数の次の数だから，$(2^{n-1}-1)+1=2^{n-1}$

ベースがフツーの自然数でよかったネ

うん

になることが確かめられます．

第 n 群の最初の数が 2^{n-1} になることが分かると，第 n 群の最後の数も分かります．なぜなら，第 $n+1$ 群の最初の数は，2^{n-1} の n のかわりに $n+1$ を代入して，2^n になるので，その 1 つ手前と考えて，2^n-1 になります．これで，第 n 群の様子が完全に掌握できました．

ゴールは
もうすぐ!!
ヤッホーイ

$\boxed{\text{第 } n \text{ 群の様子}}$　2^{n-1}　$2^{n-1}+1$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$　2^n-1　$\longrightarrow$　2^{n-1}個の自然数

次に，500 が第何群の何番目なのかを調べるにはカンでテキトーにやるしかありません．つまり第 n 群の最初の数が 2^{n-1} で，第 $n+1$ 群の最初の数が 2^n ですから，

500 が第 n 群に存在する

$$\iff 2^{n-1} \leqq 500 \leqq 2^n-1$$

と考えてこの不等式を満たす n を求めます

注　$2^{n-1} \leqq 500 < 2^n$ とした方がスッキリして良いと思います．

 たしかに!!

求め方は，具体的に n にいろいろ数字を代入して，少しずつ探していくのです．

$2^8=256$，$2^9=512$ なので，

このへんの数字は
自分で見つけるのです

$$2^8 \leqq 500 \leqq 2^9-1$$

はーい

つまり $n=9$ のときに該当するので 500 は第 9 群に存在することがわかります．

第 9 群の最初の数は $2^8=256$ なので，
$500-256+1=245$ より，500 は 245 番目に存在することがわかりました．

最後に，第 n 群にあるすべての自然数の総和は，等差数列の和の公式より，

$$\frac{2^{n-1}(2^{n-1}+2^n-1)}{2}=2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}-1)$$

です．

例題　数列 1，1，4，1，4，9，1，4，9，16，1，4，9，16，25，1，…… がある．この数列の第 100 項および初項から第 100 項までの和を求めよ．

考え方　前問が小問の誘導付だったのに対して，今回はノーヒントで第 100 項を求めよという問題．しかも自分で群に分けねばなりません．あとは，先ほどと同様に，まずは第 n 群の様子を調べ，第 100 項が第何群の何番目に存在するのかを調べます．

今回の数はすべて平方数なので，平方数に直して，群数列は群ごとに縦書きをするという鉄則に従って書きならべてみよう．

第 1 群	1^2					$\longrightarrow$ 1 個
第 2 群	1^2	2^2				$\longrightarrow$ 2 個
第 3 群	1^2	2^2	3^2			$\longrightarrow$ 3 個
第 4 群	1^2	2^2	3^2	4^4		$\longrightarrow$ 4 個
第 4 群	1^2	2^2	3^2	4^4	5^2	$\longrightarrow$ 5 個
…	…					

またまた
縦書きを
しまーす

この配列をしっかり見て，規則性を把握します．

先ほどの問題とは違って，第 n 群の様子は簡単に分かりますね．

さて，各群に含まれる数の個数を数えると

1 個，2 個，3 個，4 個，⋯

なので第 n 群の終わりまでに

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \text{ 個}$$

の数が並んでいます．よって第 n 群の最初の数は，第 $n-1$ 群の最後の数の次の数であると考え，$\frac{1}{2}(n-1)n+1$ 番目に相当します．

したがって，

第 100 項が第 n 群に存在する

$$\iff \frac{1}{2}(n-1)n+1 \leqq 100 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

と考えて，この不等式を満たす n を求めます．