注　$\frac{1}{2}(n-1)n < 100 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$ とした方がスッキリして良いと思います.

求め方は，具体的に n にいろいろ数字を代入して，少しずつ探していくのです.

$\frac{1}{2}\times13\times14=91$，$\frac{1}{2}\times14\times15=105$ なので

このへんは自分でさがします

$$\frac{1}{2}\times13\times14+1 \leqq 100 \leqq \frac{1}{2}\times14\times15$$

つまり，$n=14$ のときに該当するので第 100 項は第 14 群に存在することがわかります.

第 14 群の最初の数は，$\frac{1}{2}\times13\times14+1=92$ 番目なので，第 100 項は第 14 群の 9 番目であることが確定しました．つまり，$9^2=81$.

あー つかれたー

次に第 100 項までの和を求めるのですが，とりあえず縦書きで書き出してみると下のようになります.

はーい

ワーイ 階段みたいや

第 1 群	1^2												→ 1 個
第 2 群	1^2	2^2											→ 2 個
第 3 群	1^2	2^2	3^2										→ 3 個
第 4 群	1^2	2^2	3^2	4^2									→ 4 個
…	…												…
第 k 群	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	………	…	…	k^2				→ k 個
…	…												…
第 12 群	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	………	9^2	10^2	11^2	12^2			→ 12 個
第 13 群	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	………	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2		→ 13 個
第 14 群	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	………	9^2						→ 9 個

ようするに第 13 群までの数字を全部足して，残りの部分（第 14 群の最初から 9 個）を追加すればよいのです．そのためにまず，第 k 群の数の和を k で表そう．第 k 群の数の和は

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

もし Σ 記号で書くなら $\sum_{l=1}^{k} l^2$ です

なので，第 13 群までの総和は

1 段目～13 段目までの和

$$\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{13}\left(\frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k\right)$$

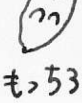
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{13\times14}{2}\right\}^2+\frac{1}{2}\,\frac{13(13+1)(26+1)}{6}+\frac{1}{6}\,\frac{13\times14}{2}$$

$$=3185$$

Σ の公式は完ペキでしょ?

これに残りモノ

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+9^2=\frac{9(9+1)(18+1)}{6}=285$$



もっちろーん

を加えれば完成です．答えは $3185+285=3470$

例題　数列 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$，…… において，初項から第 800 項までの和を求めよ.

考え方　基本の考え方は先ほどの問題と全く同じです.

縦書きして考え，第 800 項が第何群の左からかぞえて何番目に存在するのか突き止めます.

第 1 群	$\frac{1}{2}$				→ 1 個
第 2 群	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$			→ 2 個
第 3 群	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$		→ 3 個
第 4 群	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	→ 4 個
…	…				

やっぱり 縦書き するよ

第 n 群の様子は簡単に分かりますね．

さて，各群に含まれる項の個数を数えると

1 個，2 個，3 個，4 個，…

なので第 n 群の終わりまでに

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\text{ 個}$$

の数が並んでいます．よって第 n 群の最初の数は，第 $n-1$ 群の最後の数の次の数であると考え，$\frac{1}{2}(n-1)n+1$ 番目に相当します．

したがって，

第 800 項が第 n 群に存在する

$$\Longleftrightarrow\ \frac{1}{2}(n-1)n+1 \leqq 800 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

と考えて，この不等式を満たす n を求めます．

➾注　$\frac{1}{2}(n-1)n < 800 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$ とした方がスッキリして良いと思います．

求め方は，具体的に n にいろいろ数字を代入して，少しずつ探していくのです．

$\frac{1}{2}\times 39\times 40=780$，$\frac{1}{2}\times 40\times 41=820$ なので

このへんも自分でさがします

$$\frac{1}{2}\times 39\times 40+1 \leqq 800 \leqq \frac{1}{2}\times 40\times 41$$

あることより，$n=40$ と考えればよく，つまり第 40 群に存在することがわかります．

第 40 群の最初の数は，$\frac{1}{2}\times 39\times 40+1=781$ 番目なので，第 800 項は第 40 群の 20 番目であることが確定しました．

次に第 800 項までの和を求めるのですが，とりあえず縦書きで書き出してみると下のようになります．

第 1 群	$\frac{1}{2}$									⟶ 1 個
第 2 群	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$								⟶ 2 個
第 3 群	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$							⟶ 3 個
…	…				・・・					…
第 k 群	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2}{k+1}$	$\frac{3}{k+1}$	$\frac{4}{k+1}$	……	…	$\frac{k}{k+1}$			⟶ k 個
…	…									…
第 38 群	$\frac{1}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{3}{39}$	$\frac{4}{39}$	……	…	…	$\frac{38}{39}$		⟶ 38 個
第 39 群	$\frac{1}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{4}{40}$	……	…	…	$\frac{38}{40}$	$\frac{39}{40}$	⟶ 39 個
第 40 群	$\frac{1}{41}$	$\frac{2}{41}$	$\frac{3}{41}$	$\frac{4}{41}$	……	$\frac{20}{41}$				⟶ 20 個

階段で遊ぼうよー

要するに第 39 群までの数字を全部足して，余りの部分（第 40 群の最初から 20 個）を追加すればよいのです．

そのためにまず，第 k 群の数の和を k で表そう．第 k 群の数の和は

もしΣで表すなら $\displaystyle\sum_{l=1}^{k}\frac{l}{k+1}$ です．

$$\frac{1}{k+1}+\frac{2}{k+1}+\frac{3}{k+1}+\cdots\cdots+\frac{k}{k+1}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}k(k+1)}{k+1}=\frac{k}{2}$$

なので，第 39 群までの数の総和は

$$\sum_{k=1}^{39}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{39\times 40}{2}=390$$

これに残りモノ

$$\frac{1}{41}+\frac{2}{41}+\frac{3}{41}+\cdots\cdots+\frac{20}{41}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}20(20+1)}{41}=\frac{210}{41}$$

を加えれば完成です．

答えは，$390+\frac{210}{41}=\frac{16200}{41}$．

うーん 第800項に何の意味もないな…

群数列の問題は，模範解答のようにサラッとスマートに解くのではなく，コツコツ書き出して，泥臭く，ダサく解くことです．群数列の問題は正解してナンボ．自分なりに工夫してなんとか答えを導いてください．

コツコツがんばります．　はーい