数学的帰納法のカラクリ(その①)

1　倍数の証明

たとえば次の問題を考えて見ましょう.

> n は自然数とする. n^3+2n は 3 で割り切れること証明せよ.

次のような解答はどう思いますか.

解 (?)

$n=1$ のとき, $1^3+2\cdot1=3=3\times1$.

$n=2$ のとき, $2^3+2\cdot2=12=3\times4$.

$n=3$ のとき, $3^3+2\cdot3=33=3\times11$.

$n=4$ のとき, $4^3+2\cdot4=72=3\times24$.

$n=5$ のとき, $5^3+2\cdot5=135=3\times45$.

$n=1$ から $n=5$ まで, すべて 3 で割り切れているので, おそらくこの先も大丈夫である.

よって, すべての自然数 n で n^3+2n は 3 で割り切れる. (おわり)

べつに ええんとちがう?

■

明らかに何かおかしいと思いますよね.

じゃあ, 何がおかしいのか?

生徒「$n=5$ までのチェックじゃ不十分だからですか?だったら, ひたすら不眠不休で計算しまくって $n=10000$ までチェックして大丈夫なら認めてくれますか?」

先生「ダメです」

生徒「えっ?まだ不十分? だったら, 人生の全てをこの問題に捧げて $n=100000000$ までチェックして大丈夫なら良いでしょう. $n=100000000$ ですよ. さすがにここまで成立してたらもう大丈夫でしょう. いいかげん認めてくださいよ・・・」

先生「やっぱり, ダメです!」

物理学や化学の世界では, 100000000 回実験して同じ結果が得られたらさすがにその理論は正しいと認められるでしょうが, 数学の世界では許されません. 絶対に求められません. たとえ, $n=100000000$ まで正しくても, 次の $n=100000001$ が正しいかどうかは分からないからです.

自然数は無限にあります. 無限個全てを調べつくすことは不可能です. そこで, このような無限を扱う命題の証明方法として『数学的帰納法』という論法があります.『数学的帰納法』とは, 主に自然数に関する命題の証明に用いられる論法のことで, 基本的に次のような流れで証明されます

▷Point◁(『数学的帰納法』の基本的な流れ)

- Step ①　$n=1$ のとき成立していることを確認する.
- Step ②　$n=k$ のとき成立していると仮定して, $n=k+1$ のときも成立していることを証明する.
- Step ③　すべての n について成立していることを最後に確認する. (これで無限個の処理が完了)

なんで これで 証明できるの?

Step ② が論法のメイン. $n=k$ のときの情報だけを使って $n=k+1$ の結論を導き出します.

Step ② の意味は「$n=k$ が正しいならば $n=k+1$ も正しい」. 言い換えれば右のイメージ図のように,「もしも, どっかが○やったら, その次も絶対に○やで」ということ.

だから, Step ① と合わせて,

$n=1$ が正しいなら $n=2$ も正しい.

$n=2$ が正しいなら $n=3$ も正しい.

$n=3$ が正しいなら $n=4$ も正しい.

…………

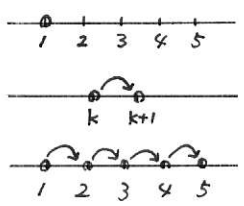
と延々と無限に続いていき, 全ての自然数 n についての証明が完成するのです.

イメージ図

Step ①

Step ②

Step ③



$n=1$ のとき成立

$n=k$ で成立したら その次の $n=k+1$ でも成立

よって すべての自然数 n で 成立することになる

そういうことかへ 実にうまい論法やわ

スゲ〜

それでは，最初の問題を数学的帰納法を利用して証明してみよう．

> **例題** n は自然数とする．n^3+2n は 3 で割り切れることを数学的帰納法で証明せよ．

解 [I]　$n=1$ のとき，

$1^3+2\cdot 1=3$.　　$\therefore$ 3 の倍数.

よって，$n=1$ のとき成立する．

[II]　$n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$k^3+2k=3m$ (m は整数) とおける．

この式は自由に使ってエエよ

$n=k+1$ のときを考えると，

$$\begin{aligned}&(k+1)^3+2(k+1)\\&=(k^3+3k^2+3k+1)+(2k+2)\\&=k^3+2k+3k^2+3k+3\\&=3m+3k^2+3k+3\\&=3(m+k^2+k+1)\quad\therefore\ 3\text{ の倍数.}\end{aligned}$$

$n=k$ のときの仮定 $k^3+2k=3m$ を代入してます

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．


OK

■

参考 「数学的帰納法を用いて」という指定がなければ，次のような式変形で終了です．なぜ，これで証明が完了したのかは自分で考えてください．


ナンデ～？

別解 $n^3+2n=n^3-n+3n=n(n+1)(n-1)+3n$. よって，すべての自然数 n で 3 の倍数である．

> **例題** n は自然数とする．5^n-1 は 4 で割り切れることを数学的帰納法で証明せよ．

考え方 2 通りの方法で解答してみます．[II] の部分に注目してください．

解 1

[I]　$n=1$ のとき，$5^1-1=4$.　$\therefore$ 4 の倍数.

よって，$n=1$ のとき成立する．

[II]　$n=k$ のとき成立すると仮定すると，

この式は自由に使ってよい

$5^k-1=4m$ (m は整数)

とおける．$n=k+1$ のときを考えると，

$5^k=4m+1$ として代入

$$\begin{aligned}5^{k+1}-1&=5\cdot 5^k-1\\&=5(4m+1)-1\\&=20m+4\\&=4(5m+1)\quad\therefore\ 4\text{ の倍数.}\end{aligned}$$

これはわかる


フムフム

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

■

解 2

[I]　$n=1$ のとき，$5^1-1=4$.　$\therefore$ 4 の倍数.

よって，$n=1$ のとき成立する．

[II]　$n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$5^k-1=4m$ (m は整数)

とおける．このとき，両辺を 5 倍して，

$$\begin{aligned}5(5^k-1)&=20m\\5^{k+1}-5&=20m\\5^{k+1}-1&=20m+4\\5^{k+1}-1&=4(5m+1)\quad\therefore\ 4\text{ の倍数.}\end{aligned}$$

なんか知らんけどできたみたい…

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

■

注 上の 2 通りの解答の違い ([II] の部分) を味わってください．**解** 1 の方は，$n=k+1$ の場合の式をいきなり攻めているのに対し，**解** 2 の方は，$n=k$ の場合の式に直接手を加えることで $n=k+1$ の式を創り出しています．あえて言うなら，**解** 1 は「相手に来てもらう解答」，**解** 2 は「自分から向かっていく解答」といったところでしょうか．どちらも正解ですが，等式や不等式の証明問題などでは，**解** 2 の方が有効であると思います．僕としては，両方をテキトーに使い分けていますが，どちらかといえば **解** 2 の方が好きで，結構この流れで解答することが多いです．

参考 「数学的帰納法を用いて」という指定がなければ，合同式を利用すれば一瞬で証明が完了します．つまり，$5^n-1\equiv 1^n-1\equiv 0 \pmod 4$ なので 5^n-1 は 4 で割り切れることがわかります．

例題 n を 2 以上の自然数とする．
$2^{3n}-7n-1$ は 49 で割り切れることを数学的帰納法で証明せよ．

考え方 n が 2 以上の自然数なので, [I] は $n=2$ を確認していることに注意しよう．

解

[I] $n=2$ のとき，$2^6-7\cdot2-1=49$.

$\therefore$ 49 の倍数．よって，$n=2$ のとき成立．

[II] $n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$$2^{3k}-7k-1=49m \ (m \text{ は整数})$$

とおける．このとき，

$2^{3k}=49m+7k+1$
として代入

$$\begin{aligned}&2^{3(k+1)}-7(k+1)-1\\=&2^{3k+3}-7k-7-1\\=&2^3\cdot2^{3k}-7k-8\\=&8(49m+7k+1)-7k-8\\=&8\cdot49m+56k+8-7k-8\\=&8\cdot49m+49k\\=&49(8m+k)\quad\therefore\ 49 \text{ の倍数.}\end{aligned}$$

うまいこと なってるゾ

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

■

注 この問題は合同式は使えないようです．数学的帰納法でやるしかありません．

それでは応用問題をひとつ．この問題を見て「数学的帰納法の問題だ」と気づくかどうか・・・

参考 n を自然数とする．
整数 $19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$ のすべてを割り切る素数を求めよ．(1991 東工大)

ムズそう…

考え方 「素数を求めよ」と言われるといかにも難しそうですが，$n=1, 2, 3, \cdots$ と入れてみると，共通に割れる素数が簡単に見つかります．つまり，

$n=1$ のとき，$19^1+(-1)^0 2^1=21=3\times7$

$n=2$ のとき，$19^2+(-1)^1 2^5=329=7\times47$

よって，共通に割れる素数は 7 であろうと予想できます．つまり，

$19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$ が 7 で割り切れること

を示せばよいのです．

なへんや それだけのことかー

あとは，通常の数学的帰納法です．途中の式変形がちょっと難しいかもしれませんが頑張ってください．解答は省略します．分からなければ質問に来てください．なお，数学的帰納法ではなく合同式を用いても証明できます．これも合わせて各自への課題としておきましょう．

▷Point◁

「何を証明するのか」を明確にし，証明が論理的に正しく流れているかどうかを常に意識する．いきなり $n=k+1$ の結論を述べずに，順を追って，証明の最後で結論付けている点にも注意．

2 等式の証明

数学的帰納法は，倍数の証明だけでなく等式の証明にも使えます．

数学的帰納法を利用して，$\sum_{k=1}^{n}k$, $\sum_{k=1}^{n}k^2$, $\sum_{k=1}^{n}k^3$ の公式の証明に挑戦してみよう．

例題 n は自然数とする．数学的帰納法によって次の等式を証明せよ．

(1) $1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

そういえば ちゃんと証明してなかったな

理由も知らんと 使ってたわ…

うん