等式の証明にでも，数学的帰納法の基本スタイルは変わりません．つまり，

> Step ① $n=1$ のときを確認．
> Step ② $n=k$ のときの成立を仮定して，$n=k+1$ の成立を示す．

です．つまり，$n=k$ のときの情報だけを使って，$n=k+1$ の式を導き出すことがポイントです．

前章の最後にも述べましたが，数学的帰納法による証明のポイントは

▷Point◁

> **「何を証明するのか」を明確にし，証明が論理的に正しく流れているかどうかを常に意識する．いきなり $n=k+1$ の結論を述べずに，順を追って，証明の最後で結論付けている点にも注意．**

です．「何を用いて，何を証明するのか」を常に意識しよう．結論の式をいきなり登場させないことがポイント．

例えば，(1) の場合，使ってよいのは $n=k$ のときの式

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

であり，この式を自由につかって，証明すべき $n=k+1$ のときの式，

$$1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+1)}{2}$$

を導き出せばよいのです．先ほども言ったように，「この式を導き出すこと」が目的なのでいきなりこの式を答案に登場させてはいけません．そのことに注意して以下の **解** を読もう．

解

(1) [I]　$n=1$ のとき，

(左辺) $=1$，　(右辺) $=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

(左辺) $=$ (右辺) より，$n=1$ のとき成立する．

[II]　$n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

このとき，

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

論理をしっかり考えよう

したがって，$n=k+1$ のときも成立している．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

■

[II] の証明は，次のようにしてもよいでしょう．

別解

[II]　$n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

このとき，$n=k+1$ のときの差を考えて，

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)-\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)-\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}-\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}-\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\&=0\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも成立している．

注　ここでは $n=k+1$ の式の差をいきなり考えました．計算そのものは先ほどの **解** とほとんど変わりません．いずれも，いわゆる等式の証明の「型」にハマッテいることを意識しよう．

よしっ!!

(2) もやってみよう．

使ってよいのは $n=k$ のときの式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

であり，この式を自由につかって，証明すべき $n=k+1$ のときの式，

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2\\&\qquad=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

を導き出せばよいのです．先ほども言ったように，「この式を導き出すこと」が目的なのでいきなりこの式を答案に登場させてはいけません．そのことに注意して以下の **解** を読もう．

解

(1) [I]　$n=1$ のとき，

(左辺) $=1^2=1$,

(右辺) $=\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$

(左辺) $=$ (右辺) より，$n=1$ のとき成立する．

[II]　$n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

このとき，

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2\\
=&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
=&\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\
=&\frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}\\
=&\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\
=&\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
=&\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

k+1でくくり出すことがポイント!!

OK～

したがって，$n=k+1$ のときも成立している．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

■

注　式変形の過程で，展開せずに因数分解を効果的につかっている点に注目しよう．目的の式はわかっているので，その式に近づくように変形を進めていきます．[II] の最後の式ですが，k の代わりに $k+1$ が入った様子が分かる形にしました．できればこの形で終えるのが良いでしょう．

(3) も同様．使ってよいのは $n=k$ のときの式

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

であり，この式を自由につかって，証明すべき $n=k+1$ のときの式，

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3=\left\{\frac{(k+1)(k+1)}{2}\right\}^2$$

を導き出せばよいのです．先ほども言ったように，「この式を導き出すこと」が目的なのでいきなりこの式を答案に登場させてはいけません．そのことに注意して以下の **解** を読もう．

解

(1) [I]　$n=1$ のとき，

(左辺) $=1^3=1$

(右辺) $=\left\{\dfrac{1(1+1)}{2}\right\}^2=1$

(左辺) $=$ (右辺) より，$n=1$ のとき成立する．

[II]　$n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

このとき，

$$\begin{aligned}
&1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3\\
=&\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3\\
=&\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}\\
=&\frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4}\\
=&\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}\\
=&\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\
=&\left\{\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right\}^2
\end{aligned}$$

$(k+1)^2$ でくくり出します

↓

$n=k+1$ の結果に近づけるためです

したがって，$n=k+1$ のときも成立している．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

■

注　先ほどと同様に，展開せずに因数分解を効果的につかっている点に注目しよう．目的の式はわかっているので，その式に近づくように変形を進めていきます．

▷Point◁

最初に目的である $n=k+1$ の結果を把握しておく．そこに向かって証明を進めていくことがポイント．ゴールはすでにわかっている．

大切な考え方!!

結論はすでに分かっているよ

▷Point◁

数学的帰納法の証明では,「何を利用して何を証明するのか」を明確にするため,「下書き」をして証明の流れを事前にチェックすること．難しい問題になればなるほど有効である．

つまり，模範解答などにあるようなスッキリした解答はいきなりは絶対に書けない，ということです．ロクに考えもせずに模範解答だけを読んでも分かりません．だから「下書き」をして流れをつかんでから清書する習慣をつけよう．

例えば，次の問題は 4STEP にある問題ですが，ちゃんと下準備して目標を定めておかないと模範解答を読んでもサッパリわからないでしょう．

例題 n は自然数とする．数学的帰納法によって次の等式を証明せよ．

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)$$

✎注　左辺部の末項 $2n$ は $n+n$ と解釈するとわかりやすいかもしれません．

これまで通り，$n=k$ のときの式 ① と，$n=k+1$ のときの式 ② を書いて，① から ② をどう導き出すか考えます．しかし，① の式をどう使うのか，サッパリわからないでしょう．入念な下準備が必要です．

式① $(k+1)\underline{(k+2)(k+3)\cdots(k+k)}=2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)$

$\Downarrow$ k のかわりに $k+1$ を代入すると・・・

式② $((k+1)+1)((k+1)+2)((k+1)+3)\cdots((k+1)+(k+1))=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)$

① にどう手を加えれば ② になるのか検討がつかないので，② の式をもう少し詳しく調べてみましょう．隠れている部分を書き出してみます．

$$② \iff (k+2)(k+3)(k+4)\cdots(2k+2)=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)$$

$$\iff \underline{(k+2)(k+3)(k+4)\cdots(2k)}(2k+1)(2k+2)=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)(2k+1) \quad \cdots\cdots②'$$

① の式と ②′ の式をじっくりと見て比較すると，下線部が共通であることが分かります．この部分にツッコミます．

上みたいな下準備がなかったら
いきなりこの解答みても わからんなぁ

うん

解 [I] $n=1$ のとき，

$(\text{左辺})=1+1=2$, $(\text{右辺})=2^1\cdot1=2$

(左辺)=(右辺) より，$n=1$ のとき成立する．

[II] $n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdots\cdots(2k)=2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2k-1)$$

$$(k+2)(k+3)\cdots\cdots(2k)=\frac{2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2k-1)}{k+1}$$

$n=k+1$ のときを考えると，

$$\begin{aligned}&(k+2)(k+3)\cdots\cdots(2k)(2k+1)(2k+2)\\&=\frac{2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2k-1)}{k+1}\cdot(2k+1)(2k+2)\\&=\frac{2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2k-1)}{k+1}\cdot(2k+1)\cdot2(k+1)\\&=2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2k-1)(2k+1)\cdot2\\&=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2k-1)(2k+1)\end{aligned}$$

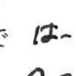
下書きって
大切!!

したがって，$n=k+1$ のときも成立している．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．■

数学的帰納法の証明の流れはいろいろあります．文章表現も様々．教える先生によっても様々．論理がキッチリと通っていればどうやったって構いません．自分なりの証明スタイルを早く確立することが重要です．自分の書いた証明の論理が正しいかどうかは，先生に見せてチェックしてもらうのが一番でしょう．

はーい



センセー
お願いしまーす