数学的帰納法のカラクリ（その②）

～不等式の証明～

とっても
大切なところです
ガンバルぞ～

数学的帰納法のカラクリ（その①）では「倍数の証明」と「等式の証明」を紹介しました．まずは，この内容が基本なので，基礎に不安のある人はもう一度そちらを見直しておくこと．

は～い

▷Point◁（『数学的帰納法』の基本的な流れ）

Step ①	$n=1$ のとき成立していることを確認する．
Step ②	$n=k$ のとき成立していると仮定して，$n=k+1$ のときも成立していることを証明する．
Step ③	すべての n について成立していることを最後に確認する．（これで無限個の処理が完了）

一番のヤマは Step ② でした．この部分に論理的ミスがないように細心の注意を払わねばなりません．

フムフム…

▷Point◁

「何を証明するのか」を明確にし，証明が論理的に正しく流れているかどうかを常に意識する．いきなり $n=k+1$ の結論を述べずに，順を追って，証明の最後で結論付けている点にも注意．

OKで～す

今回は「不等式の証明」ですが，僕はいつも 2 通りの証明を紹介しています．それは

直接比較法　と　間接比較法

です．「なんのこっちゃ？」って感じですが，やればわかります．とりあえず両方勉強してみて，自分と相性の良い方法を選んでください．

なお，これまでと同様に「下書き」して解答するわけですが，不等式の証明をする場合こそ「下書き」の重要性を実感すると思います．

例 題 1　n が 4 以上の自然数のとき，不等式

$$2^n > 3n+1$$

を数学的帰納法によって証明せよ．

考え方　使ってよいのは，まず $n=k$ のときの不等式

$$\boxed{2^k > 3k+1}$$

であり，この式を自由に使って、証明すべき $n=k+1$ のときの不等式

$$\boxed{2^{k+1} > 3(k+1)+1}$$

を導き出せばよいのです．先ほども言ったように，「この式を導き出すこと」が目的なのでいきなりこの式を答案に登場させてはいけません．そのことに注意して以下の 解 を読もう．なお，$n \geqq 4$ であることも忘れないように．

このへんは
倍数や
等式の
証明と
全く同じ～

解　[I]　$n=4$ のとき，

（左辺）$=2^4=16$，（右辺）$=3\cdot4+1=13$

（左辺）＞（右辺）より，$n=4$ のとき成立する．

[II]　$n=k$　($k \geqq 4$)　のとき成立すると仮定すると，

$$2^k > 3k+1$$

$n=k+1$ のときの両辺の差を考えると，

$$\begin{aligned}
&2^{k+1}-\{3(k+1)+1\}\\
&=2\cdot\underline{2^k}-(3k+4)\\
&>2\underline{(3k+1)}-(3k+4)\\
&=3k-2>0\ (\because\ k \geqq 4)
\end{aligned}$$

～～部に
$n=k$ の仮定を
使っています。

すなわち，

$$2^{k+1} > 3(k+1)+1$$

ナルホド～
こういう使い方なのネ

したがって，$n=k+1$ のときも成立している．

■

目的の不等式

$$2^{k+1} > 3(k+1)+1$$

を証明するために（結論であるこの不等式は答案には書かず）この不等式の (左辺) − (右辺) を直接計算して証明しています．途中で，$n=k$ のときの条件をうまく利用していることがわかります．ここがポイントです．また，不等式の証明の基本型に従って解答されている点にも注意しよう．

この証明方法を**直接比較法**といいます．

次に，**間接比較法**による証明を紹介します．個人的にはこっちの方法が好きです．

ふ〜ん どんなの？

考え方 （間接証明法）

$n=k$ のときの式は自由に使ってよいのだから，この式に手を加えて，$n=k+1$ のときの式へ進んでいくには，まずどうすれば良いのでしょうか．少しでも近づけるためには……

下書き（準備編）

$2^k > 3k+1$

⇓ どうする？　う〜ん

$2^{k+1} > 3(k+1)+1$

すると，まずは 両辺を 2 倍すればよい ことに気付くはず．よって，

下書き（試行錯誤編）

$2^k > 3k+1$

⇓ 両辺を 2 倍する　あっ そうか!!

$2^{k+1} > 2(3k+1)$　…①

⇓ どうする？　う〜ん

$2^{k+1} > 3(k+1)+1$　…②

さて，ここからが問題です．等式の証明の場合のように「(① の右辺)=(② の右辺)」であれば何の問題もないのですが，明らかにそうなっていません．どうすればよいのでしょうか．

▷Point◁

$A > B$ という情報がわかっているとき，$A > C$ であることを A と C を直接比較せずに証明するには，$B \geqq C$ という条件を証明すればよい．

$$A > B$$
$$\Downarrow \longleftarrow \boxed{B \geqq C}$$
$$A > C$$

つまり，直接的に比較せずに間接的に比較することで大小関係を証明する．

ナルホド〜

つまり，

$$2^{k+1} > 2(3k+1)$$

という情報から，

$$2^{k+1} > 3(k+1)+1$$

を証明するには

$$2(3k+1) \geqq 3(k+1)+1$$

この式を 示すことが 目的になります

を証明すればよいのです．

これが，いわゆる**間接比較法**による証明です．

したがって，証明の流れをまとめると，

下書き（完成版）　やっと できた〜

$2^k > 3k+1$

⇓ 両辺を 2 倍する

$2^{k+1} > 2(3k+1)$

⇓ ⟵ $\boxed{2(3k+1) \geqq 3(k+1)+1 \text{ を示す}}$

$2^{k+1} > 3(k+1)+1$

以上の下書きを踏まえて本チャンの解答を作成します．基本的にこの下書きをそのまま写していくだけです．

解 [I]　$n=4$ のとき，
(左辺) $=2^4=16$，(右辺) $=3\cdot 4+1=13$
(左辺) $>$ (右辺) より，$n=4$ のとき成立する．
[II]　$n=k$ $(k \geqq 4)$ のとき成立すると仮定すると，

$$2^k > 3k+1$$

$$2^{k+1} > 2(3k+1) \quad \cdots ①$$

ところで，

エッ?
いきなりかよ!!

$$\begin{aligned} &2(3k+1)-\{3(k+1)+1\} \\ =&6k+2-(3k+3+1) \\ =&3k-2>0\ (\because\ k \geqq 4) \end{aligned}$$

よって，

$$2(3k+1) > 3(k+1)+1 \quad \cdots ②$$

①，② より，

$$2^{k+1} > 3(k+1)+1$$

この式は，$n=k+1$ のときの成立を意味している．
[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

■

注　上の解答を見て，途中の「ところで …」の部分があまりに唐突すぎて違和感を覚えるかもしれません．しかし，数学的な論理の流れとしては全く問題ありません．もし「なんでいきなりこんな式を持ちだすんや」と問い詰められたら、「たまたま思いついた」と言いましょう(もちろん下書きあってのことであるのは言うまでもありません)．

以上，直接比較法と間接比較法の2通りの証明を紹介しましたが，いかがだったでしょうか？どちらも，いきなりスッとは理解できないかもしれませんが，じっくり論理を考えてマスターしてください．

それでは，次の問題も「直接比較法」と「間接比較法」で解き比べてみましょう．

は〜い

例題 2　n は自然数とするとき，不等式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 < \frac{(n+1)^3}{3}$$

を数学的帰納法によって証明せよ．

直接比較法による解法

考え方　使ってよいのは，まず $n=k$ のときの不等式

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}}$$

であり，この式を自由に使って、証明すべき $n=k+1$ のときの不等式

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2 < \frac{(k+2)^3}{3}}$$

を導き出せばよいのです．先ほども言ったように，「この式を導き出すこと」が目的なのでいきなりこの式を答案に登場させてはいけません．そのことに注意して以下の **解** を読もう．

解 [I]　$n=1$ のとき，
(左辺) $=1^2=1$，(右辺) $=\dfrac{(1+1)^3}{3}=\dfrac{8}{3}$
(左辺) $<$ (右辺) より，$n=1$ のとき成立する．
[II]　$n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}$$

$n=k+1$ のときの両辺の差を考えると，

$$\begin{aligned} &\frac{(k+2)^3}{3}-\{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2\} \\ >&\frac{(k+2)^3}{3}-\frac{(k+1)^3}{3}-(k+1)^2 \\ =&\frac{(k+2)^3-(k+1)^3-(k+1)^2}{3} \\ =&\frac{3k+4}{3}>0\ (\because\ k \geqq 1) \end{aligned}$$

〜〜部に
n=kの仮定を
使っています。
不等式の向きに
注意しよう

すなわち，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2 < \frac{(k+2)^3}{3}$$

したがって，$n=k+1$ のときも成立している．

■