引き続いて，間接証明法でやってみよう．

まってました!!

間接証明法による解法

考え方 $n=k$ のときの式は自由に使ってよいのだから，この式に手を加えて，$n=k+1$ のときの式へ進んでいくには，まずどうすれば良いのでしょうか．少しでも近づけるためには……

すると，まずは，両辺に $(k+1)^2$ を加えればよいことに気付くはず．よって，

下書き（準備編）

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2<\frac{(k+1)^3}{3}$$

⇓ どうする？　うーん

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\frac{(k+2)^3}{3}$$

下書き（思考錯誤編）

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2<\frac{(k+1)^3}{3}$$

⇓ 両辺に $(k+1)^2$ を加える　あっ そっか!!

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2 \quad \cdots ①$$

⇓ どうする？　うーん

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\frac{(k+2)^3}{3} \quad \cdots ②$$

さて，ここからが問題です．等式証明の場合のように「(① の右辺)=(② の右辺)」であれば何の問題もないのですが，明らかにそうなっていません．どうすればよいのでしょうか．

▷Point◁

$A<B$ という情報がわかっているとき，$A<C$ であることを A と C を直接比較せずに証明するには，$B \leqq C$ という条件を証明すればよい．

$$\begin{array}{c} A<B \\ \Downarrow \longleftarrow \boxed{B \leqq C} \\ A<C \end{array}$$

つまり，直接比較せずに間接比較することで大小関係を証明する．

さっきよりも スムーズに 意味がつかめてきたゾ

注 先ほどと不等号の向きが逆ですが，考え方は全く同じです．

つまり，$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\dfrac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2$

という情報から，$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\dfrac{(k+2)^3}{3}$

を証明するには，$\dfrac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2 \leqq \dfrac{(k+2)^3}{3}$ ← この式を示すことが目的になります。

を証明すればよいのです．

納得!!

OK でーす

したがって，証明の流れをまとめると，

下書き (完成版)　　やっと できた〜

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2<\frac{(k+1)^3}{3}$$

$\Downarrow$ 両辺に $(k+1)^2$ を加える　　あっ そっか!!

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2$$

$\Downarrow$ $\longleftarrow$ $\boxed{\dfrac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2\leqq\dfrac{(k+2)^3}{3}\text{ を示す}}$　　ナルホド〜

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\frac{(k+2)^3}{3}$$

以上の下書きを踏まえて，本チャンの解答を作成します．基本的に，この下書きをそのまま写していくだけです．

解 [I]　$n=1$ のとき，(左辺) $=1^2=1$，　(右辺) $=\dfrac{(1+1)^3}{3}=\dfrac{8}{3}$

(左辺) $<$ (右辺) より，$n=1$ のとき成立する．

[II]　$n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2<\frac{(k+1)^3}{3}$$

両辺に $(k+1)^2$ を加えると，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2\quad\cdots\cdots①$$

ところで，　エッ? いきなり…

$$\begin{aligned}&\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2-\frac{(k+2)^3}{3}\\=&\frac{(k+1)^3+3(k+1)^2-(k+2)^3}{3}\\=&\frac{k^3+3k^2+3k+1+3k^2+6k+3-(k^3+6k^2+12k+8)}{3}\\=&\frac{-3k-4}{3}<0\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2<\dfrac{(k+2)^3}{3}\quad\cdots\cdots②$

①，② より，$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\dfrac{(k+2)^3}{3}$

この式は，$n=k+1$ のときの成立を意味している．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

間接比較法を マスターしたぞ〜

ヤッホーイ

■

参考 この問題では数学的帰納法で証明するように指定されているので，数学的帰納法で証明しましたが，他の方法でも証明できます．なかなか面白い方法なので，参考までに2通りの別解を紹介しましょう．

> $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2<\dfrac{(n+1)^3}{3}$ を自由な発想で証明せよ．

好きな方法でやっていいよ～

別解1 $\sum k^2$ の公式を利用する方法．

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

おなじみの公式ですね

よゆう～

なので，

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)<\frac{(n+1)^3}{3}$$

ごくごく普通の不等式の証明問題です

を証明すればよい．

$$\begin{aligned}(\text{右辺})-(\text{左辺})&=\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{1}{6}(n+1)\{2(n+1)^2-n(2n+1)\}\\&=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+4n+2-2n^2-n)\\&=\frac{1}{6}(n+1)(3n+2)>0\end{aligned}$$

あたりまえすぎて全然おもしろくないよ

あ～つまらん

よって，もとの不等式は成立する．

■

注 もっともオーソドックスな証明ですね．数学的帰納法よりもずっと素直な解答です．

別解2 定積分を利用して面積比較する方法．

放物線 $y=x^2$ と x 軸，$x=n+1$ で囲まれた部分（点線部）の面積は

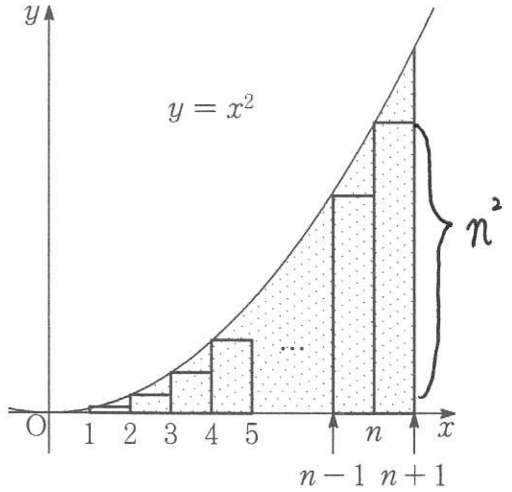
$$\int_0^{n+1}x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{n+1}=\frac{(n+1)^3}{3}$$

これが面積とは!!

また，右図の長方形の面積の和は

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$

ちょっとびっくり



長方形の横幅はすべて1です

■

したがって，図より，長方形の面積の和よりも放物線で囲まれた部分（点線部）の面積の方が大きいので，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2<\frac{(n+1)^3}{3}$$

が成立する．

この証明はスゴイオモロイ．感動的!!

オモロ～

注 面積の大小比較を利用した画期的な方法．この解答，マジで凄いと思いませんか？まさか定積分が登場するなんて．でも，この考え方は数学 III では割とよくある考え方．いわゆる「区分求積法」とよばれるとても重要な概念です．3年生の6月ごろ学習します．お楽しみに．

は～い