数学的帰納法のカラクリ(番外編)

1　解けない漸化式を解くには

漸化式の解き方については，これまで様々なタイプを紹介しましたが，それでも解けない漸化式というものが存在します．キリがありませんね．いったいどうすんねんって話です．


ホンマや〜
カンベンしてほしいよ

▷Point◁

> 漸化式が「解けない」とわかったら，漸化式より，具体的に a_1，a_2，a_3，a_4，$\cdots$ を計算して，その結果から a_n の形を予想し，数学的帰納法で証明するという方針をとる．

とりあえず，具体例でやってみよう．

> **例題 1**　$a_1=3$，$a_n{}^2=(n+1)a_{n+1}+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．
> (1) a_2，a_3，a_4 を計算し a_n を予想せよ．
> (2) (1) の予想が正しいことを数学的帰納法で証明せよ．

考え方

漸化式に $n=1$ を代入すると，
$a_1{}^2=2a_2+1$．$a_1=3$ より，$a_2=4$．

漸化式に $n=2$ を代入すると，
$a_2{}^2=3a_3+1$．$a_2=4$ より，$a_3=5$．

規則性
わかる〜

漸化式に $n=3$ を代入すると，
$a_3{}^2=4a_4+1$．$a_3=5$ より，$a_4=6$．


OK

よって，以上より $a_n=n+2$ であると予測されます．あとはこのことを数学的帰納法で示すだけ．つまり，

$$\boxed{a_k=k+1 \implies a_{k+1}=(k+1)+1}$$

であることを示せばよいのです．$a_k=k+1$ という情報を自由につかって，$a_{k+1}=(k+1)+1=k+2$ であることを導くにはどうすればよいのか．当然，使えるネタは漸化式 $a_n{}^2=(n+1)a_{n+1}+1$ だけです．となれば，$a_k{}^2=(k+1)a_{k+1}+1$ に $a_k=k+2$ を代入すれば a_{k+1} を自然に導き出すことができます．

解　(予想部分は省略します)

$a_n=n+2$ であると予想し，数学的帰納法で証明する．

[I]　$n=1$ のとき，
$a_1=1+2=3$ となり，$n=1$ のとき正しい．

[II]　$n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$$a_k=k+2$$

このとき，漸化式より $a_k{}^2=(k+1)a_{k+1}+1$ なので，

$$(k+2)^2=(k+1)a_{k+1}+1$$
$$k^2+4k+4=(k+1)a_{k+1}+1$$
$$k^2+4k+3=(k+1)a_{k+1}$$
$$(k+1)(k+2)=(k+1)a_{k+1}$$
$$\therefore\ a_{k+1}=k+2=(k+1)+1$$

思ってたより
カンタンやな


できそう〜

したがって，$n=k+1$ のときも成立する．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

$$\therefore\ a_n=n+2$$

■

注　今回の場合,「予想して数学的帰納法で示せ」という指示があったので，それに従いましたが，ヒントなしにいきなり「漸化式 $a_n{}^2=(n+1)a_{n+1}+1$ を解け」と言われても，このような手法をとります．

漸化式 $a_n{}^2=(n+1)a_{n+1}+1$ を解くことはできません．いくら考えてもできません．時間のムダ．だったら，とっとと諦めて数学的帰納法に持ち込みましょう．


はーい

大切なことは，**この漸化式は解けない漸化式であるとサッサと見極めて，数学的帰納法で求めようとできるかどうか**，ということ．解けないことに気づかずに，延々と漸化式をいじくって時間を費やすのは愚かなことですね．

注　なお，これまでにやってきた，いわゆる「解ける」漸化式の場合も，予想して数学的帰納法で求めることも可能ですが，実は「解ける」漸化式ほど予想が難しいという悲しい現実もあるので，やっぱり「解ける」漸化式はそのまま解くのが無難でしょう．


フムフム

2 変則的帰納法 (Part Ⅰ)

例題 2 正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおく．数列 $\{a_n\}$ が $2S_n = {a_n}^2 + n$ を満たすとき，
(1) a_1，a_2，a_3，a_4 を計算し a_n を予想せよ．
(2) (1) の予想が正しいことを数学的帰納法で証明せよ．

考え方 まずは a_1 から計算しよう．
漸化式に $n = 1$ を代入すると，$2S_1 = {a_1}^2 + 1$.
$S_1 = a_1$ より，$2a_1 = {a_1}^2 + 1$.
${a_1}^2 - 2a_1 + 1 = 0$.
$(a_1 - 1)^2 = 0$．よって，$a_1 = 1$

続いて，a_2，a_3，a_4 を計算しよう．
漸化式に $n = 2$ を代入すると，$2S_2 = {a_2}^2 + 2$.
$S_2 = a_1 + a_2$ より，$2(a_1 + a_2) = {a_2}^2 + 2$.
$a_1 = 1$ を代入して，$2(1 + a_2) = {a_2}^2 + 2$.
${a_2}^2 - 2a_2 = 0$.
$a_2(a_2 - 2) = 0$．$a_2 > 0$ より，$a_2 = 2$

落ち着いて計算しよう

漸化式に $n = 3$ を代入すると，$2S_3 = {a_3}^2 + 3$.
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ より，
$2(a_1 + a_2 + a_3) = {a_3}^2 + 3$.
$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ を代入して，
$2(1 + 2 + a_3) = {a_3}^2 + 3$.
${a_3}^2 - 2a_3 - 3 = 0$.
$(a_3 + 1)(a_3 - 3) = 0$．$a_3 > 0$ より，$a_3 = 3$

漸化式に $n = 4$ を代入すると，$2S_4 = {a_4}^2 + 4$.
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ より，
$2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = {a_4}^2 + 4$.
$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 3$ を代入して，
$2(1 + 2 + 3 + a_4) = {a_4}^2 + 4$.
${a_4}^2 - 2a_4 - 8 = 0$.
$(a_4 + 2)(a_4 - 4) = 0$．$a_4 > 0$ より，$a_4 = 4$

なーんや

よって，以上より $a_n = n$ であると予測されます．あとはこのことを数学的帰納法で示すだけです．

とても カンタンです。(予想だけなら)

こう言ってしまえば，先ほどの問題とほとんど同じようですが，実は決定的に違うところがあります．すでに予想する段階で違いがあるのですが，気づきましたか？

べつに 同じと ちがうの？

決定的な違い
先ほどの 例題 1 では，
a_1 を使って a_2 を求め，
a_2 を使って a_3 を求め，
a_3 を使って a_4 を求め
ているが，今回の 例題 2 では，
a_1 を使って a_2 を求め，
a_1 と a_2 を使って a_3 を求め，
a_1 と a_2 と a_3 を使って a_4 を求めている．

そういわれると 確かに ちがう

気づかんかったわ

つまり，最初の例題では，a_k の情報だけで a_{k+1} を作り出すことができましたが，今回の場合，a_k の情報だけではダメで，a_1，a_2，$\cdots$，a_k の全ての情報がないと a_{k+1} を作り出すことができないのです．← ポイント
つまり，

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \cdots\cdots,\ a_k = k \\ \Longrightarrow\ a_{k+1} = k + 1$$

を証明することになります．したがって，帰納法のスタイルも異なってきます．

解 $a_n = n$ であると予想し，数学的帰納法で証明する．
[I] $n = 1$ のとき，
$a_1 = 1$ となり，$n = 1$ のとき正しい．
[II] $n \leqq k$ のとき 成立すると仮定する．
つまり，← ポイント

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \cdots\cdots,\ a_k = k$$

このとき，漸化式より $2S_{k+1} = {a_{k+1}}^2 + (k + 1)$ なので，

この部分に $n \leqq k$ の仮定をつかう

$$2(\underline{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k} + a_{k+1}) = {a_{k+1}}^2 + (k+1)$$

$$2(\underline{1 + 2 + \cdots\cdots + k} + a_{k+1}) = {a_{k+1}}^2 + (k+1)$$

$$2\left(\frac{k(k+1)}{2} + a_{k+1}\right) = {a_{k+1}}^2 + (k+1)$$

$$k^2 + k + 2a_{k+1} = {a_{k+1}}^2 + (k+1)$$

$${a_{k+1}}^2 - 2a_{k+1} - (k^2 - 1) = 0$$