この因数分解は思いつかんわ

$$a_{k+1}{}^2 - 2a_{k+1} - (k+1)(k-1) = 0$$

$$(a_{k+1} + (k-1))(a_{k+1} - (k+1)) = 0$$

$a_{k+1} > 0$ より，$a_{k+1} = k+1$

でも大丈夫!!

したがって，$n = k+1$ のときも成立する．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

結果を知ってるからネ

$$\therefore\ a_n = n$$

■

注　S_n を含んだ漸化式の解法は以前に紹介しました (犬プリ「和 S_n から一般項 a_n を求める方法」参照)．つまり，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ という関係から a_{n+1} と a_n の漸化式を作りだすのでした．

試しにやってみましょう．

$2S_{n+1} = a_{n+1}{}^2 + (n+1)$ として辺々を引くと，

$$\begin{array}{rcccl} 2S_{n+1} & = & a_{n+1}{}^2 & + & (n+1) \\ 2S_n & = & a_n{}^2 & + & n \\ \hline 2a_{n+1} & = & a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 & + & 1 \end{array}$$

したがって，$2a_{n+1} = a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 + 1$ という漸化式を解くことになるのですが，一見して「ムリだ」と気づいてほしいところ．

ナルホド〜
OK

3　変則的帰納法 (Part Ⅱ)

次の問題は 4STEP の問題です．

例題 3　n は自然数とする．
2 数 x，y の和と積ともに整数ならば，$x^n + y^n$ は整数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

なにこれ？ 数列とちがう？

考え方　「$x^n + y^n$ は整数であること」を数学的帰納法で証明するには，基本型に従えば，

$$x^k + y^k が整数 \Longrightarrow x^{k+1} + y^{k+1} が整数$$

つまり，「$x^k + y^k$ が整数である」という情報だけを使って，「$x^{k+1} + y^{k+1}$ が整数である」ことを示すことになります．そのためには，$x^{k+1} + y^{k+1}$ と $x^k + y^k$ の間に成り立つ関係を考えねばなりません．

$x^{k+1} + y^{k+1}$ が $x^k + y^k$ だけを用いて変形できれば，一気に証明が完成するのですが，いくら考えてもできないのです．無理やり関係式を作ろうとすると次のような関係式に行き着きます．

$$x^{k+1} + y^{k+1} = (x+y)(x^k + y^k) - xy(x^{k-1} + y^{y-1})$$

重要な式です

この式は

> $x^{k+1} + y^{k+1}$ は，
> $x^{k-1} + y^{k-1}$ と $x^k + y^k$ の 2 つを用いて表される

こと意味しています．つまり，「$x^{k-1} + y^{k-1}$ が整数である」と「$x^k + y^k$ が整数である」という 2 つの情報があれば，「$x^{k+1} + y^{k+1}$ が整数である」ことが示せそうです．「$x^k + y^k$ が整数である」という情報だけでは不足していたわけです．

そのためには数学的帰納法の証明の型をちょっと変更する必要があります．

つまり，今回の帰納法は

$$n = k が正しい \Longrightarrow n = k+1 が正しい$$

X

ではなく，

$$n = k,\ k+1 が正しい \Longrightarrow n = k+2 が正しい$$

○ こっちを使う

という型になります．

証明の [II] 部分が変わるのはもちろんのこと，[I] 部分も変更せねばなりませんね．

解

[I]　$n = 1,\ 2$ のときを考える．

条件より，$x + y$ が整数なので，$x^1 + y^1$ は整数．

また xy も整数なので，$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ より，$x^2 + y^2$ も整数．

よって，$n = 1,\ 2$ のとき正しい．

[II]　$n = k,\ k+1$ のとき成立すると仮定する．つまり，

$$x^k + y^k \quad と \quad x^{k+1} と\ y^{k+1} \quad が整数$$

であるとする．このとき，

$$x^{k+2} + y^{k+2} = (x+y)(x^{k+1} + y^{k+1}) - xy(x^k + y^y)$$

より，$x + y$ と xy が整数なので．$x^{k+2} + y^{k+2}$ も整数になる．

したがって，$n = k+2$ のときも成立する．

[I][II] より，すべての自然数 n で成立する．

■

うまく
できた—

注 今回の帰納法は 2 つの情報から次の結論が得られるタイプなので，当然，[I] の部分も $n=1,\ 2$ の 2 つを調べています．

つまり，

$n=1,\ 2$ が正しければ $n=3$ が正しい，
$n=2,\ 3$ が正しければ $n=4$ が正しい，
$n=3,\ 4$ が正しければ $n=5$ が正しい，
$n=4,\ 5$ が正しければ $n=6$ が正しい，
……………………

という論法を繰り返していくイメージを持つことが大切です．

注 別のイメージで言うと，これまでの帰納法は

「昨日のことがわかれば今日のことが分かる」

でという感じですが，今回の帰納法は

「昨日と一昨日のことが分かれば今日のことが分かる」みたいな感じ．

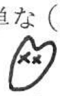
だからこのような帰納法は「キノウ法」ではなく「オトトイキノウ法」と呼んだほうがふさわしいかもね．　なかなかユニークなネーミング 

驚くべきことに，例題 3 の類題が東京大学で出題されました．


トーダイ
行きたい

参考 $a,\ b$ 実数で，$a^2+b^2=16,\ a^3+b^3=44$ を満たしている．このとき，
(1) $a+b,\ ab$ の値を求めよ．
(2) n を 2 以上の整数とするとき，a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ．
（1997 東京大学前期文系）

考え方

例題 2 と全く同じ方法で解くことができます．東大といえどもアイデアは 4STEP レベルです．ただ，さすがは東大．(1) は計算が結構メンドウで，なかなか答えが出ないんですね．(1) ができなければ，超簡単な (2) が解けないという悲劇が待っています．　 ガーン

(1) は答えだけを紹介しておきますので，各自で挑戦してみてください．(2) の解説の概略だけ紹介します．

解 (1) $a+b=2,\ ab=-6$

(2) まず，$n=2,\ 3$ が正しいことを示す．

次に $n=k,\ k+1$ で正しいと仮定し，

$$a^{k+2}+b^{k+2}=(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab(a^k+b^k)$$

に (1) の結果を用いると

$$a^{k+2}+b^{k+2}=2(a^{k+1}+b^{k+1})+6(a^k+b^k)$$

になるので，a^k+b^k と $a^{k+1}+b^{k+1}$ が 4 で割り切れる整数ならば，$a^{k+2}+b^{k+2}$ も 4 で割り切れる整数になる．つまり $n=k+2$ のときも成立．

よって，以上より，証明完了．

■

4　最後に

例題 2 や 例題 3 を紹介すると「どうしてこのような型の帰納法になると思いつくんですか」という質問を受けます．この質問に対しては，「さあ，僕にもわかりません」と答えています．

これは無責任な話ではなく，「問題を見ただけではどのような帰納法になるのかは僕にも分からない．帰納法の証明の下準備をする途中過程において『あっ，ちょっと違うタイプかも』と自分で気づき，方針変更する」ということです．つまり，「やってみないとわからない」んですね．

これまでに「倍数の証明」「等式の証明」「不等式の証明」「解けない漸化式の解法」「変則的帰納法」と様々なタイプの数学的帰納法の実例を紹介してきましたが，やっぱり次の 2 点

・帰納法の証明では下書きをして，証明の流れを把握すること．
・ただ，漫然と下書きするのではなく，状況をしっかりと見据えること．

が重要であることを，最後にあたらめて強調しておきたいと思います．


下書きしようね．
そして自分で
気づこうね