赤阪正純（http://inupri.web.fc2.com）

数列の基礎（その ①）〜等差数列〜

等差数列は
すべての数列の基本です。
公式は、意味を考えて
確実におぼえよう。

項と項の差が等しい数列を等差数列といいます．等差数列の項と項の差を公差と言います．


はーい

> 【例】 初項 $a_1=2$，公差 $d=3$ である等差数列 $\{a_n\}$ について
> (1) 第 10 項 a_{10} を求めよ．
> (2) 第 10 項までの和 S_{10} を求めよ．

考え方 とりあえず書き出してみて規則性を考えよう．

$$\{a_n\}: \underset{a_1}{2},\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26,\ \underset{a_{10}}{29}$$

+d +d +d +d +d +d +d +d +d

$a_1 \sim a_{10}$ +9d

(項数) − 1 が
間隔の数に
なります。


あたりまえー

初項 a_1 から第 10 項 a_{10} まで，間隔の数が $10-1=9$ 個あるので，初項 a_1 に公差 d を 9 回足せばよく，

$$a_{10}=a_1+(10-1)d=2+9\cdot 3=29$$

$$\begin{array}{rcl} S_{10} &=& 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ S_{10} &=& 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline 2S_{10} &=& 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

逆から
並べて書く

31 が 10 個

よって，$2S_{10}=10\times 31$． $\therefore S_{10}=\dfrac{10\times 31}{2}=155\left(=\dfrac{10\times(2+29)}{2}\right)$

一般的な等差数列の公式は次の通りです．上で紹介した具体例をそのまま一般化するだけです．

▷Point◁（初項 a_1，公差 d の等差数列の公式）

一般項	$a_n=a_1+(n-1)d$	⟵	$a_n=$（初項）+（項数 − 1）・（公差）
和	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$	⟵	$S_n=\dfrac{(\text{項数})\cdot(\text{初項}+\text{末項})}{2}$
	$S_n=\dfrac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}$	⟵	$S_n=\dfrac{(\text{項数})\cdot\{2\cdot(\text{初項})+(\text{項数}-1)\cdot(\text{公差})\}}{2}$

公式は
言葉で
おぼえよう

n は
項数のこと
ですよ


はーい

⇨注 数列の公式は必ず言葉で憶えることが鉄則．声に出して，言葉で憶えよう．

はーい

ブツブツ言いながら
おぼえまーす．

それでは 4STEP 問題集から公式に当てはめるだけではない，ちょっと考える問題を紹介しよう．

> 【例 1】 次の等差数列の和を求めよ．
> $2+6+10+14+\cdots\cdots+90$

考え方 初項，末項，公差は見れば分かるので，あとは項数だけ分かれば OK．つまり，末項 90 が第何項目なのかが分かればよいのです．

解 初項 2，公差 4 の等差数列の一般項は
$a_n=2+(n-1)\cdot 4=4n-2$．
$4n-2=90$ より $n=23$．
よって末項 90 は第 23 項目．
よって，$S=\dfrac{23(2+90)}{2}=1058$．


OK
これは楽勝

> 【例 2】 $a_{16}=-50$，$a_{21}=-80$ である等差数列の初項と公差を求めよ．4 は第何項目か．

解 初項 a_1，公差 d とすると，

$$\left.\begin{array}{l} a_{16}=a_1+(16-1)d=a_1+15d=-50 \\ a_{21}=a_1+(21-1)d=a_1+20d=-80 \end{array}\right\}\ a_1 \text{と} d \text{の連立方程式}$$

辺々を引いて $5d=-30$．よって $d=-6$．
さらに $a_1=40$．よって，
$a_n=40+(n-1)(-6)=-6n+46$．
次に，$a_n=4$ となる n は
$-6n+46=4$ より $n=7$．よって 4 は第 7 項目．


フムフム

⇨注 いきなり「4 は第何項目か」と出題されても，まずは初項と公差を求めねばなりません．

初項と公差がわかれば
等差数列は完全に決定します。

ナットク

OK

【例 3】 $a_{10}=152$，$a_{25}=392$ である等差数列の初項からの和が 1000 より大きくなるのは第何項からか．

解 前問と同様にして，$a_1=8$，$d=16$．（解答省略．やっぱり初項と公差は必要です）

$$S_n=\frac{n\{2\cdot 8+(n-1)\cdot 16\}}{2}=8n^2.$$

よって，$S_n>1000$ となる最小の自然数 n を求めればよい．S_n は n についての増加関数なので，$S_{11}=968$，$S_{12}=1152$ より，$S_n>1000$ となる最小の自然数 n は $n=12$．よって和が 1000 を超えるのは第 12 項から．

注 $S_n>1000$ つまり，$8n^2>1000$ という 2 次不等式を実際に解いてみると $n<-5\sqrt{5}$, $5\sqrt{5}<n$ となり，$5\sqrt{5}=11.8\cdots$ なので，これをみたす最小の自然数 n は $n=12$ とわかります．しかしこのように割と簡単に n が求まるのは極めてマレなこと．上の解答のように実際に解くのではなく，グラフの単調性を利用して具体的に数を当てはめて検証する方法がベスト．

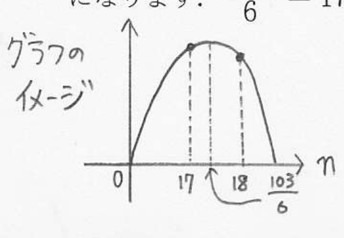
【例 4】 初項 50，公差 -3 である等差数列について，第何項から負の数になるか．また初項から第何項までの和が最大になるか．

解 $a_n=50+(n-1)(-3)=-3n+53$.

したがって，$-3n+53<0$ となる最小の自然数 n を求めればよい．$n>17.6\cdots$ なので n は自然数だから $n=18$．よって第 18 項から負の数になる．

また，初項から第 17 項までは正の数で，第 18 項から負の数になるので和が最大になるのは初項から第 17 項までの和である．

注 後半を厳密に解くには，和を n で表し，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(103-3n)}{2}$ とし，n についての 2 次関数 $y=\dfrac{n(103-3n)}{2}$ の最大値を考えることになりますが，ちょっとメンドウです．なぜなら，これは頂点が $n=\dfrac{103}{6}$ の上に凸な 2 次関数なのですが，n は自然数なので $n=\dfrac{103}{6}$ で最大にはならず，$n=\dfrac{103}{6}$ に最も近い自然数で最大になります．$\dfrac{103}{6}=17.1\cdots$ なので $n=17$．



2次関数のグラフは
軸に関して左右対称です。
だから $\frac{103}{6}$ に最も近い自然数で
Maxになるのです。

【例 5】 ある等差数列の $S_{10}=100$, $S_{20}=400$ のとき，S_{30} を求めよ．

考え方 初項と公差が分かればできます．

解 初項 a_1，公差 d とおくと，

$$S_{10}=\frac{10(2a_1+9d)}{2}=10a_1+45d=100 \quad\cdots①$$
$$S_{20}=\frac{20(2a_1+19d)}{2}=20a_1+190d=400 \quad\cdots②$$
$$S_{30}=\frac{30(2a_1+29d)}{2}=30a_1+435d \quad\cdots③$$

① と ② より，$a_1=1$，$d=2$．

よって，③ より，$S_{30}=30+870=900$．

参考 実は次のような不思議な計算でも求めることができます．

$S_{20}-S_{10}=300$

$300-S_{10}=200$

$300+200=500 \quad \therefore\ S_{30}=100+300+500=900$

？？？ この計算は．一体ナニ？
でもちゃんと答えが出てる…

この式の秘密が知りたければ，直接聞きに来てください．ヒントは……「面積」．

【例 6】 a と b の間にある 5 を分母とする全ての分数（整数除く）の和を求めよ．$(0<a<b)$

考え方 $a=3$，$b=7$ の場合で具体的に考えてみます．$3=\dfrac{15}{5}$，$7=\dfrac{35}{5}$ なので，順番に書きならべてみると，

$3=\frac{15}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{19}{5}$
$4=\frac{20}{5}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{22}{5}$	$\frac{23}{5}$	$\frac{24}{5}$
$5=\frac{25}{5}$	$\frac{26}{5}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{28}{5}$	$\frac{29}{5}$
$6=\frac{30}{5}$	$\frac{31}{5}$	$\frac{32}{5}$	$\frac{33}{5}$	$\frac{34}{5}$
$7=\frac{35}{5}$				

ムズカシイけど
具体例で考えると
イメージしやすいね
ナルホド〜

整数（つまり左端の数）は除くので，上の $\boxed{}$ で囲った分数の和を求めればよいのです．よって全部の和から整数の和（左端の数の和）を除けば良く，

$$\frac{15+16+17+\cdots+34+35}{5}-\frac{15+20+25+30+35}{5}$$

分子は
単なる
等差数列
ですよ!!

あとは一般的に文字 a，b で考えるだけ．上のように書き並べるとわかりやすいでしょう．

このように『数列』分野では難しい問題に遭遇した時，具体例で検証して法則を見つけるという手法がよく取られます．とても重要な考え方なのでこの問題を通して学んでほしいです．

とにかく
具体的に
OK 考えるようにします。