数列の基礎（その ②）〜等比数列〜

今回は等比数列。
これも数列の基本です。
等差数列とセットで
理解しよう。

はーい

項と項の比が等しい数列を等比数列といいます．等比数列の項と項の比を公比と言います．

【例】　初項 $a_1 = 2$，公比 $r = 3$ である等比数列 $\{a_n\}$ について
（1）第 5 項 a_5 を求めよ．　　（2）第 5 項までの和 S_5 を求めよ．

考え方　とりあえず書き出してみて規則性を考えよう．

$$\{a_n\}:\quad \overset{a_1}{2} \xrightarrow{\times r} 6 \xrightarrow{\times r} 18 \xrightarrow{\times r} 54 \xrightarrow{\times r} \overset{a_5}{162}$$

$$a_1 \xrightarrow{\times r^4} a_5$$

（項数）−1 が
間隔の数になります。

初項 a_1 から第 5 項 a_5 まで，間隔が $5-1=4$ 個あるので，初項 a_1 に公比 r を 4 回かければよく，

$$a_5 = a_1 r^{5-1} = 2\cdot 3^4 = 162$$

$$S_5 = 2+6+18+54+162 = 2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+2\cdot 3^5$$

S_5 に公比 3 をかけて
$3S_5$ を考え，引きます。
わかりやすいように
右へズラして書きました。
最後の項の符号に
注意しよう。

コーヒー（公比）を
かけて，引く

$$\begin{array}{rrcccccccccc}
 & S_5 = & 2 & + & 2\cdot 3 & + & 2\cdot 3^2 & + & 2\cdot 3^3 & + & 2\cdot 3^4 & \\
-) & 3S_5 = & & & 2\cdot 3 & + & 2\cdot 3^2 & + & 2\cdot 3^3 & + & 2\cdot 3^4 & + 2\cdot 3^5 \\
\hline
 & (1-3)S_5 = & 2 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & - 2\cdot 3^5
\end{array}$$

よって，$(1-3)S_5 = 2-2\cdot 3^5$．$\therefore S_{10} = \dfrac{2-2\cdot 3^5}{1-3} = 242\left(=\dfrac{2(1-3^5)}{1-3}\right)$

一般的な等比数列の公式は次の通りです．上で紹介した具体例をそのまま一般化するだけです．

▷Point◁（初項 a_1，公比 r の等比数列の公式）

一般項	$a_n = a_1 r^{n-1}$	⟵	$a_n = (\text{初項})\cdot(\text{公比})^{(\text{項数})-1}$
和（$r \neq 1$ のとき）	$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$	⟵	$S_n = \dfrac{(\text{初項})\cdot(1-(\text{公比})^{(\text{項数})})}{1-(\text{公比})}$
（$r=1$ のとき）	$S_n = na_1$	⟵	$S_n = (\text{項数})\cdot(\text{初項})$

r=1のときは
a_1ばっかり
n コ足します
→ $S_n = a_1 + a_1 + \cdots + a_1$（n コの和）

n は項数

等比数列の
公式こそ
言葉で
おぼえよう。
特に"和の公式"

➾注　等差数列の時と同様，数列の公式は必ず言葉で憶えることが鉄則．声に出して，言葉で憶えよう．

はーい

ブツブツ
言いながら
おぼえます…

それでは 4STEP 問題集の中から，ちょっと考える代表的な問題を紹介しよう．

【例 1】　初項 162，公比 $-\dfrac{1}{3}$，末項 2 の等比数列の和を求めよ．

考え方　初項，公比が分かっているので，あとは項数だけ分かれば OK．つまり，末項 2 が第何項目なのかが分かればよいのです．

解　$a_n = 162\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$．

分数の指数は
必ずカッコをつけよう

$162\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 2$ より，$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{81}$．

$\dfrac{1}{81} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^4$ なので，$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^4$．

よって $n=5$．つまり末項 2 は第 5 項なので，

$$S_5 = \frac{162\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{162\left(1+\frac{1}{243}\right)}{\frac{4}{3}} = 122$$

【例 2】　$a_5 = -48$，$a_7 = -192$ である等比数列の初項と公比，一般項を求めよ．

解　初項 a_1，公比 r とすると，

$$\left.\begin{array}{l}
a_5 = a_1 r^{5-1} = a_1 r^4 = -48 \cdots ① \\
a_7 = a_1 r^{7-1} = a_1 r^6 = -192 \cdots ②
\end{array}\right\}$$

a_1 と r の
連立方程式

$\dfrac{②}{①}$ より，$r^2 = 4$．$r = \pm 2$．よって，$a_1 = -3$．

$\therefore a_n = -3\cdot 2^{n-1}$ または $a_n = -3\cdot(-2)^{n-1}$

ここが
ポイント

等差 a. b. c　+d +d　c=b+d　a=b−d　∴ a+c=2b

等比 a. b. c　×r ×r　c=br　a=b/r　∴ ac=b²

【例 3】 初項 1，公比 3 の等比数列で初めて 100 より大きくなるのは第何項か．また，少なくとも第何項までの和をとると 1000 より大きくなるか．

解 $a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$.

したがって，$3^{n-1} > 100$ となる最小の自然数 n を求めればよい．a_n は n についての増加関数なので，$3^4 = 81$，$3^5 = 243$ より，$3^{n-1} > 100$ となる最小の自然数 n は $n-1=5$ より $n=6$．よって第 6 項で初めて 100 より大きくなる．

また，$S_n = \dfrac{1(1-3^n)}{1-3} = \dfrac{3^n-1}{2}$.

したがって，$\dfrac{3^n-1}{2} > 1000$，つまり $3^n > 2001$ となる最小の自然数 n を求めればよい．3^n は n についての増加関数なので，$3^6 = 729$，$3^7 = 2187$ より，$3^n > 2001$ となる最小の n は $n=7$．よって第 7 項までの和が初めて 1000 より大きくなる．

✎注 実際に不等式を解くのではなく（ていうか，今回の場合はそもそも解けない），グラフの単調性を利用して具体的に数を当てはめて検証するのです．なお，もっと数が大きい場合（例えば和が 1 億を超えるとき，とか）は，常用対数を利用して求めることもあります．

【例 4】 初項から第 3 項までの和が 3，第 4 項から第 6 項までの和が −24 である等比数列の初項と公比を求めよ．

考え方 第 3 項ぐらいまでの和なら，和の公式を利用するとかえって分かりにくくなります．実際に書き出したほうが賢明です．

和の公式を使わずに具体的に求めてます　ナルホド

解 初項から第 6 項までを書き出すと，

a_1，a_1r，a_1r^2，a_1r^3，a_1r^4，a_1r^5

よって，

$a_1 + a_1r + a_1r^2 = 3$ …①

$a_1r^3 + a_1r^4 + a_1r^5 = -24$ …②

r^3でくくる!! これがポイント

② より，$r^3(a_1 + a_1r + a_1r^2) = -24$

① を代入して，$3r^3 = -24$ より $r^3 = -8$.

よって $r=-2$．① に代入して $a_1 = 1$.

【例 5】 数列 8，a，b が等差数列で，数列 a，b，36 が等比数列であるとき，a，b の値を求めよ．

考え方 等差中項，等比中項の考えを用います．

▷Point◁

a，b，c がこの順に等差数列 $\iff 2b = a+c$

a，b，c がこの順に等比数列 $\iff b^2 = ac$

理由は各自で考えよう．分からなければ質問に．

解

数列 8，a，b が等差数列なので，$2a = 8+b$.

数列 a，b，36 が等比数列なので，$b^2 = 36a$

以上より，$(a, b) = (1, -6), (16, 24)$.

【例 6】 数列 2，6，……，954，…… は，等差数列になることができるか，等比数列になることができるか．

考え方 最初の 2 項を見れば，もし等差数列になるなら公差 4，等比数列になるなら公比 3 であることがわかります．

解 もし等差数列なら公差 4 なので，一般項は $a_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n-2$．$a_n = 954$ となる n は $4n-2 = 954$ より $n = 239$ と確かに存在する．よって等差数列になることができる．

また，もし等比数列なら公比 3 なので，一般項は $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$．$b_n = 954$ となる n は $2 \cdot 3^{n-1} = 954$ より $3^{n-1} = 477$．この式を満たす n は存在しない（$3^5 < 477 < 3^6$ だから）．よって等比数列になることはできない．

【例 6】 数列 $\{\log_2 a_n\}$ が初項 2，公差 −1 の等差数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ は等比数列であることを証明せよ．

考え方 数列 $\{a_n\}$ が等比数列であることを証明するには，「$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$ 定数」であることを示せば良いのです．項と項の比が一定である数列が等比数列だからです．

解 数列 $\{\log_2 a_n\}$ が初項 2，公差 −1 の等差数列であるので，

$\log_2 a_n = 2 + (n-1)(-1) = -n+3$.

$\log_2 a_n = b_n$ とおきかえて考えよう。

つまり，$a_n = 2^{-n+3}$

したがって，$a_{n+1} = 2^{-(n+1)+3} = 2^{-n+2}$ なので，

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{-n+2}}{2^{-n+3}} = \dfrac{1}{2} =$ 一定．よって数列 $\{a_n\}$ は等比数列である．

ていうか，なんで数列の問題に log 出てくるねん…．　いやや