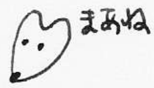
数列の基礎(その ③)～Σ記号～

Σって カッコエエわぁ ー 書いてるだけで かしこくなった気がするぅ～

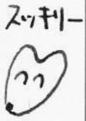
これまで数列の和は，次のように「……」を用いて表していました．

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$



これだと，ちょっとイマイチなので次のような記号を用いてスッキリと表現することにします．

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$



$\sum_{k=1}^{n}a_k$ は，「a_k の k の所に $k=1$ から $k=n$ まで順番に代入して足せ」という意味です．

つまり，Σ記号は，数列の和を簡単に表現する手段に過ぎません．

【例】 $\sum_{k=1}^{10}(2k+3)$ を具体的に書き出せ

考え方 $2k+3$ に $k=1$ から $k=10$ まで順番に入れて足すだけです．

解

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+3)=\underset{k=1}{5}+\underset{k=2}{7}+\underset{k=3}{9}+11+13+15+17+19+21+\underset{k=10}{23}$$

注 よく「k って何ですか？」という質問を受けます．結論から言えば「特に意味はない」．つまり k 自体に意味はなく別に他の文字でも構いません．例えば，$\sum_{l=1}^{10}(2l+3)$ は $2l+3$ に $l=1$ から $l=10$ まで順番に入れて足すので

$$\sum_{l=1}^{10}(2l+3)=5+7+9+11+13+15+17+19+21+23$$

となり，先ほどの例と全く同じ結果が得られます．

注 Σ記号は必ずしも $k=1$ からとは限りません．例えば，$\sum_{k=2}^{11}(2k+1)$ は，$2k+1$ に $k=2$ から $k=11$ まで順番に入れて足すことになるので，

$$\sum_{k=2}^{11}(2k+1)=\underset{k=2}{5}+\underset{k=3}{7}+9+11+13+15+17+19+21+\underset{k=11}{23}$$

これも先ほどの例と全く同じ結果になりました．

【例】 等差数列の和 $2+6+10+14+\cdots\cdots+90$ を Σ 記号を用いて書け．

考え方 まずは元の数列の一般項を求めます．さらに末項 90 が第何項目なのか考えます．

解 初項 2，公差 4 の等差数列の一般項は $a_n=2+(n-1)\cdot4=4n-2$.

$4n-2=90$ より $n=23$.

よって末項 90 は第 23 項目．したがって，

$$2+6+10+14+\cdots\cdots+90=\sum_{k=1}^{23}(4k-2)$$

さて，以前に紹介した「自然数の和」も次のようにΣ記号で表現されます．

$$1+2+3+\ \cdots\ +n=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\ \cdots\ +n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$$

したがって，次の重要公式が得られます．

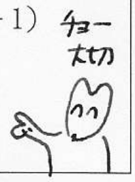
とても重要な公式です。3つとも必ず確実に暗記しよう。マジで大切!!

▷Point◁

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$



注 この公式はいずれも k が 1 から n まででであることに注意しよう．

【例】 $\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{1}{6}\cdot10(10+1)(2\cdot10+1)=385$

Σの公式は状況に応じて変化します．次の式は，先ほどの公式の n をそっくりそのまま $n-1$ に置き換えたものです．

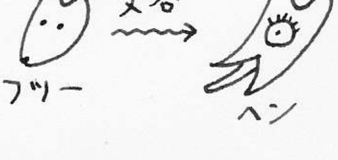
$$\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

2(n−1)+1 より

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\left\{\frac{1}{2}(n-1)n\right\}^2$$

このような変化は他にもいろいろあるので，その時々に応じて，自分で作っていかねばなりません．Σの公式は変容するのです．



たとえば，$\sum_{k=1}^{n} 3 = \underbrace{3+3+\cdots+3}_{n個} = 3n$

$\sum_{k=1}^{n-1} 3 = \underbrace{3+3+\cdots+3}_{n-1個} = 3(n-1)$ ということです

フ〜ン

また，次の $\sum$ の公式は別途憶えておこう．

▷Point◁

$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{個}}$$

これは特別ルールです

$$= nc \quad (c \text{ は } k \text{ とは無関係の定数})$$

次の公式は $\sum$ を使って書いてあるだけで，単なる初項 r^1，公比 r，項数 n の等比数列の和の公式です．

▷Point◁

$r \neq 1$ のとき，　この公式は言葉でおぼえること

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = r^1 + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{r^1(1-r^n)}{1-r}$$

(※ $r=1$ の場合は上の公式に順ずる)

✎注 $\sum_{k=1}^{n} 2^k$ と $\sum_{k=1}^{n} k^2$ とを混同しないように注意しよう．まったく別モノです．

等比数列の和は初項と公比，項数で決まります．等比数列の和を $\sum$ 記号で書くと，確かにスッキリして美しいですが，初項や公比，項数はパッと見てわかりません．$\sum$ 記号で書いたところで結局，書き出して初項と公比，項数を調べることになり，かえって不便です．

▷Point◁

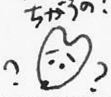
等比数列の和が $\sum$ 記号で書かれているときは，具体的に書き出して，初項と公比，項数をチェックせねばならない．

よく間違ってしまう例が次の場合です．

(1) $\sum_{k=1}^{n} 3^k$　(2) $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}$

(3) $\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k+1}$　(4) $\sum_{k=0}^{n} 3^k$

何がちがうの？



考え方　等比数列の和の公式は言葉で憶えよう．

解

(1) $\sum_{k=1}^{n} 3^k$ (初項 3^1，公比 3，項数 n)

$$= 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots\cdots + 3^n = \frac{3^1(1-3^n)}{1-3}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}$ (初項 3^0，公比 3，項数 n)

$$= 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots\cdots + 3^{n-1} = \frac{3^0(1-3^n)}{1-3}$$

(3) $\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k+1}$ (初項 3^2，公比 3，項数 $n-1$)

$$= 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots\cdots + 3^n = \frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3}$$

(4) $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ (初項 3^0，公比 3，項数 $n+1$)

$$= 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots\cdots + 3^n = \frac{3^0(1-3^{n+1})}{1-3}$$

【例】 $\sum_{k=1}^{n} (k^2+3k+2)$

考え方　$\sum$ 計算はバラせます．なぜなら，足し算は順番を変えても構わないからです．縦書きで考えると明らかですね．

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2) = \begin{array}{l} 1^2 - 3\cdot 1 + 2 \\ + 2^2 - 3\cdot 2 + 2 \\ + 3^2 - 3\cdot 3 + 2 \\ \cdots\cdots \\ + n^2 - 3\cdot n + 2 \end{array}$$

$\sum_{k=1}^{n} k^2$　$\sum_{k=1}^{n} k$　$\sum_{k=1}^{n} 2$

バラバラに分けて計算できるってこと

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$$

ナットク

解

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 2n$$

$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12\}$$

$\frac{1}{6}n$ でくくった

$$= \frac{1}{6}n(2n^2+n+2n+1-9n-9+12)$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2-6n+4)$$

$$= \frac{1}{3}n(n^2-3n+2)$$

$$= \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

うまく因数分解できた〜

ヤッホーイ

✎注 いきなり展開せずに，因数分解に持ち込むことがポイント．

このように $\sum$ は，和，差，実数倍についてはバラせますが，積に関してはバラすことはできません．よって，次のような場合は，展開してから計算します．

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(9k^2-6k+1)$$

$$= 9\sum_{k=1}^{n} k^2 - 6\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = (\text{以下略})$$