赤阪正純（http://inupri.web.fc2.com）

ミックスジュースはコーヒーをかけると分離できる？

ホンマか～？
ホンマやったら
ノーベル賞もんやわ

等差数列や等比数列の和は，$\sum$ 記号や公式を用いて計算できます．例えば，

等差数列の和　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

等比数列の和　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n = \frac{2^1(1-2^n)}{1-2} = 2(2^n-1)$

などです．では，次のような和はどのようにして計算すればよいのでしょうか．

（等差）×（数列）のミックス型　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = 1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n = ???$

➾注　くれぐれも $\sum$ をバラさないこと．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} k \times \sum_{k=1}^{n} 2^k$ です．$\sum$ 記号は積ではバラせません．具体的に書き出せば等しくならないのは明らかですね．

$$1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n \fallingdotseq (1+2+3+\cdots+n)\times(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)$$

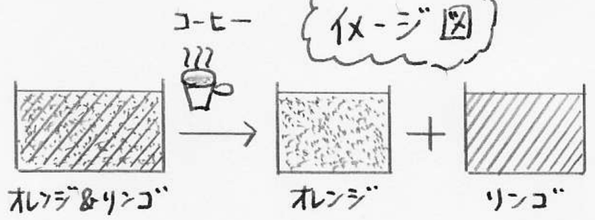
そりゃそうやわ
これは
おかしい

（等差）×（数列）のミックス型の和を求めるには，次のポイントが重要です．

▷Point◁

ミックスジュースはコーヒーをかけて引くと
(等差)×(等比)タイプ　公比
分離することができる．

➾注　このことは科学的に証明されている（ウソだよ～ん）．



ジュースのみたい

実に
わかりやすい
具体例

【例 1】　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ を計算せよ．　⟶　まずは具体的に書き出すこと．

考え方　$\sum$ のままでは全く手も足も出ません．実際に書き並べてコーヒー（公比）をかけて引こう．

$$\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & S = & 1\cdot 2^1 & + & 2\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2^3 & + & \cdots\cdots & + & (n-1)\cdot 2^{n-1} & + & n\cdot 2^n & \\
-) & 2S = & & & 1\cdot 2^2 & + & 2\cdot 2^3 & + & \cdots\cdots & + & (n-2)\cdot 2^{n-1} & + & (n-1)\cdot 2^n & + \ n\cdot 2^{n+1} \\
\hline
 & -S = & 1\cdot 2^1 & + & 1\cdot 2^2 & + & 1\cdot 2^3 & + & \cdots\cdots & + & 1\cdot 2^{n-1} & + & 1\cdot 2^n & - \ n\cdot 2^{n+1}
\end{array}$$

注意!! マイナスになります!!

$$-S = \underbrace{2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n}_{\text{純度100\%の等比数列（初項}2^1\text{, 公比}2\text{, 項数}n\text{）}} - n2^{n+1}$$

これは
ミスりそう…

ワーイ
分離できたー

$$= \frac{2^1(1-2^n)}{1-2} - n2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 - n2^{n+1} = (1-n)2^{n+1} - 2$$

$$\therefore \quad S = (n-1)2^{n+1} + 2$$

これは $-S$ のことなので
S にもどす

大成功!!

【例 2】　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)3^k$ を計算せよ．　⟶　まずは具体的に書き出すこと．

考え方　前問同様，まずは具体的に書き並べて，コーヒー（公比）をかけて引こう．

$$
\begin{array}{rrcl}
 & S &=& 1\cdot 3^1 + 3\cdot 3^2 + 5\cdot 3^3 + \cdots\cdots + (2n-3)\cdot 3^{n-1} + (2n-1)\cdot 3^n \\
-) & 3S &=& \qquad\quad 1\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots\cdots + (2n-5)\cdot 3^{n-1} + (2n-3)\cdot 3^n + (2n-1)\cdot 3^{n+1} \\
\hline
 & -2S &=& 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \cdots\cdots + 2\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^n - (2n-1)\cdot 3^{n+1}
\end{array}
$$

注意!! マイナスになるよ

$$-2S = 3 + 2\underbrace{(3^2 + 3^3 + \cdots\cdots + 3^n)}_{\text{純度100\%の等比数列 (初項}3^2\text{, 公比3, 項数}n-1\text{)}} - (2n-1)3^{n+1}$$

仲間ハズレ

さっきと同じやー

楽勝

$$= 3 + 2\frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1)3^{n+1} = 3 + 3^2(3^{n-1}-1) - (2n-1)3^{n+1} = -(2n-2)3^{n+1} - 6$$

$$\therefore\quad S = (n-1)3^{n+1} + 3$$

これは −2S のことなので Sにもどす

【例 3】 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^{k-1}}$ を計算せよ． $\longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ と解釈します．

考え方 やっぱりコーヒー（公比）をかけて引く．公比が分数なので計算ミスに注意して慎重にやろう．

$$
\begin{array}{rrcl}
 & S &=& 1\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots\cdots + (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
-) & \frac{1}{3}S &=& \qquad 1\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots\cdots + (n-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + n\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
\hline
 & \frac{2}{3}S &=& 1\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 1\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 1\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots\cdots + 1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - n\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{array}
$$

注意!! マイナスになるよ

$$\frac{2}{3}S = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{\text{純度100\%の等比数列 (初項}(\frac{1}{3})^0\text{, 公比}\frac{1}{3}\text{, 項数}n\text{)}} - n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

慎重に計算しよう

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} - n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) - n\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$$

これは $\frac{2}{3}S$ のことなので Sにもどす

$$\therefore\quad S = -\frac{3}{2}\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{9}{4} = -\frac{3}{2}\,\frac{2n+3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{9}{4} = -\frac{2n+3}{4\cdot 3^{n-1}} + \frac{9}{4}$$

【例 4】(やや難) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 3^k$ を計算せよ． $\longrightarrow$ やはり，まずは具体的に書き出すこと．

考え方 (等差)×(等比) タイプではありませんが，同じようにコーヒー（公比）をかけて引くと ……

$$
\begin{array}{rrcl}
 & S &=& 1^2\cdot 3^1 + 2^2\cdot 3^2 + 3^2\cdot 3^3 + \cdots\cdots + (n-1)^2\cdot 3^{n-1} + n^2\cdot 3^n \\
-) & 3S &=& \qquad 1^2\cdot 3^2 + 2^2\cdot 3^3 + \cdots\cdots + (n-2)^2\cdot 3^{n-1} + (n-1)^2\cdot 3^n + n^2\cdot 3^{n+1} \\
\hline
 & -2S &=& 1^2\cdot 3^1 + (2^2-1^2)\cdot 3^2 + (3^2-2^2)\cdot 3^3 + \cdots\cdots + \{(n-1)^2-(n-2)^2\}\cdot 3^{n-1} + \{n^2-(n-1)^2\}\cdot 3^n - n^2\cdot 3^{n+1}
\end{array}
$$

やっぱりマイナス

$$-2S = \underbrace{1\cdot 3^1 + 3\cdot 3^2 + 5\cdot 3^3 + \cdots\cdots + (2n-3)3^{n-1} + (2n-1)3^n}_{\text{この部分が[例2]と全く同じになります。}} - n^2\cdot 3^{n+1} \quad \cdots(※)$$

[例2]の結果をそのまま使いました

$$= (n-1)3^{n+1} + 3 - n^2\cdot 3^{n+1} = (-n^2+n-1)3^{n+1} + 3$$

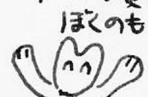
$$\therefore\quad S = \frac{n^2-n+1}{2}3^{n+1} - \frac{3}{2}$$

[例2]の結果が使えるなんて…

さっきやっといてよかったー

注 もし実際にこの問題が出題されるとすれば，最初に【例 2】が誘導として出題されると思います．もし，誘導がなければ，(※) 部分でもう一度公比をかけて引くという作業をすることになります．

ノーベル賞はぼくのものー



ヤッホーイ