Σ記号を利用して数列の和を求めよう．

Σの公式は完ペキでしょうね？

OK もっちろーん

いろいろな数列の和を Σ 記号を利用して求めてみよう．次のポイントが重要です．

▷Point◁

Step ① 末項を見ずに，漠然と k 番目を見て，k 番目を k の式で表す．

Step ② 末項が何番目に相当するのか確認して，和を Σ 記号を用いて表す．

Step ③ Σ 計算を実行する ⟶ あとは式が勝手にやってくれる．

とにかく，具体例を通して学んでいくことにしよう．次は代表的な重要例です．

【例 1】　次の数列の和を求めよ．　$1^2\cdot2+2^2\cdot3+3^2\cdot4+\cdots\cdots+n^2\cdot(n+1)$

考え方 最初の数項だけをみて第 k 項を予想しよう．そのあと，末項が第何項目に相当するのか考えよう．

解　第 k 項が $k^2(k+1)$ である数列の初項から第 n 項までの和だから，

$$\left.\begin{aligned}a_1 &= 1^2\times2\\ a_2 &= 2^2\times3\\ a_3 &= 3^2\times4\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots$$
$$a_k = k^2\times(k+1)$$

この部分だけをみて a_k (k番目)を予想します。

まあ これは そのまんまやな　ブツー

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

因数分解した形で答えるのがエチケットです ■

はーい

注 第 k 項の形を見て「な〜んや，問題文に書いてある末項 $n^2(n+1)$ の n を k に代えただけやん」と思っては絶対にダメです．そう思っている人は，次のような問題で悩むことに．

サッパリわからんー

あれ〜？

【例 2】　次の数列の和を求めよ．　$1\cdot n+3\cdot(n-1)+5\cdot(n-2)+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot2+(2n-1)\cdot1$

考え方 質問の多い問題です．セオリー通りに，最初の数項だけをみて第 k 項を k の式で表すのですが，これがなかなか難しい．各項が 2 つの数の積になっていることから，各項を前半部分と後半部分に分けて考えると良いでしょう．

$$\left.\begin{aligned}a_1 &= 1 \times n\\ a_2 &= 3 \times (n-1)\\ a_3 &= 5 \times (n-2)\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots$$
$$a_k = (2k-1)\times(n-k+1)$$

この部分だけをみ a_k (k番目)を予想するのです

(前半部)　1, 3, 5, …… ⟶ 初項 1，公差 2 の等差数列の第 k 項なので，$1+(k-1)\cdot2=2k-1$

(後半部)　$n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots\cdots$ ⟶ 初項 n, 公差 -1 の等差数列の第 k 項なので，$n+(k-1)\cdot(-1)=n-k+1$

ふーん

縦書きすれば何となくわかるけど…

解　第 k 項は $(2k-1)(n-k+1)$ なので，求める和は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(n-k+1)&=\sum_{k=1}^{n}(2kn-2k^2+2k-n+k-1)=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(-2k^2+(2n+3)k-(n+1))}\\&=-2\sum_{k=1}^{n}k^2+(2n+3)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}(n+1)\\&=-2\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(2n+3)\times\frac{1}{2}n(n+1)-(n+1)n\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

kについて整理することがポイント

落ち着いて計算しよう

ゆっくり正確に!!

最終的に $\sum_{k=1}^{n}k^2$ と同じ結果になるのがふしぎですね．

ほんまやなー

【例 3】　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ．

1,　$1+3$,　$1+3+9$,　$1+3+9+27$,　……

はっ？一体何を求めるんですか？

いやだー

考え方　当然，第 k 項を k の式で表すのですが，今回の場合，数列の各項自体が数列の和の形になっているので，第 k 項を k の式で表すために和の計算をせねばなりません．その後もう一度 $\sum$ 計算をして，もとの数列の和を計算します．これまでと同様，縦書きするとイメージがしやすいと思います．

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= 1 &&= 1\\
a_2 &= 1+3 &&= 1+3^1\\
a_3 &= 1+3+9 &&= 1+3^1+3^2\\
a_4 &= 1+3+9+27 &&= 1+3^1+3^2+3^3
\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots$$

$$a_k = 1+3+9+27+\cdots \quad = \quad 1+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{k-1}$$

この部分だけをみて a_k（k番目）を予想します。

a_kを求めること自体に和の計算が必要なんですね…

ナットク

解　第 k 項は初項 1，公比 3，項数 k の等比数列の和だから，

$$a_k = 1+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{k-1} = \frac{1(1-3^k)}{1-3} = \frac{3^k-1}{2}$$

等比数列の和の公式

よって数列全体の和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}3^k - \sum_{k=1}^{n}1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3^1(1-3^n)}{1-3} - n\right) = \frac{3^{n+1}-2n-3}{4}$$

■

【例 4】　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ．

$\dfrac{3}{1^2}$,　$\dfrac{5}{1^2+2^2}$,　$\dfrac{7}{1^2+2^2+3^2}$,　$\dfrac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2}$,　……

基本的な考え方はさっきと全く同じ

うーん

考え方　【例 3】同様，各項自体が和の形をしているので，まずは分数タイプの $\sum$ 計算は，部分分数に分けて縦書きするのが鉄則．

解　第 k 項は $\dfrac{2k+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2} = \dfrac{2k+1}{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)} = \dfrac{6}{k(k+1)}$

実にシンプルな形になりました

ラッキー

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\times 6$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)\times 6$$

$$=\frac{6n}{n+1}$$

■

$$\begin{array}{ll}
\left(\boxed{\frac{1}{1}} - \cancel{\frac{1}{2}}\right)\times 6 & (k=1)\\
\left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right)\times 6 & (k=2)\\
\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right)\times 6 & (k=3)\\
\vdots & \vdots\\
\left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right)\times 6 & (k=n-1)\\
\left(\cancel{\frac{1}{n}} - \boxed{\frac{1}{n+1}}\right)\times 6 & (k=n)\\
\hline
\end{array}$$

縦書きは実にわかりやすいね

たのしー

【例 5】　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ．

3,　33,　333,　3333,　33333,　……

3ばっかりで目がサンになるぅ～

33

考え方　パズルのような問題．例えば第 3 項 333 は，$333 = \dfrac{999}{3} = \dfrac{1000-1}{3} = \dfrac{10^3-1}{3}$ と解釈できます．999 が 10^3-1 と表現できることがポイントですね．

解　$a_k = \dfrac{10^k-1}{3}$ より，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{10^1(1-10^n)}{1-10} - n\right) = \frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$