「和 S_n」から「一般項 a_n」を求める方法

今までやってきたこと
$a_n \rightarrow S_n$
$a_n \leftarrow S_n$
今からやること

ようするに逆をやるってことか…
べつにエエのに…

1　S_n が n の式で表されている場合

いきなりですが，次の問題を考えてみよう．

> 例題　$a_n = 2n+3$ のとき，S_n を求めよ．

S_n とは $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$，つまり初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和のことなので，次のように $\sum$ 計算をして求めます．

解

このへんは楽勝

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (2k+3) \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n \\ &= n^2 + 4n \end{aligned}$$

OK
よゆー

つまり，$a_n = 2n+3$ のとき $S_n = n^2 + 4n$ です．

■

では逆に，

> 例題　$S_n = n^2 + 4n$ のとき，a_n を求めよ．

と言われたらどうでしょう．S_n から a_n を求めることはできるのでしょうか？　うーん…

これまでは，一般項 a_n から和 S_n を求めてきましたが（最初の 例題 みたいなやつ），今度は逆に，和 S_n から一般項 a_n を求めてみようというわけです．

いきなり a_n を求めるのはしんどいので，まずは最初のいくつかを具体的に調べてみることにしよう．こういう具体的な計算が理解を深めます．

これならできそう

> 例題　$S_n = n^2 + 4n$ のとき，a_1，a_2，a_3，a_4 を求めよ．

S_n とは初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和のことです．特に S_1 が，a_1 から a_1 までの和，つまり a_1 そのものであることに注意しよう．よって具体的に書き出すと，

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

たしかに…
フムフム

となります．$S_1 \sim S_4$ の値は，$S_n = n^2 + 4n$ より，

$$\begin{aligned} S_1 &= 1^2 + 4 \times 1 = 5 \\ S_2 &= 2^2 + 4 \times 2 = 12 \\ S_3 &= 3^2 + 4 \times 3 = 21 \\ S_4 &= 4^2 + 4 \times 4 = 32 \end{aligned}$$

これもOK

と求まるので，結局，下のような連立方程式を解くことになります．

それだけのことか…　なるほど

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 &&= 5 &&\cdots ① \\ S_2 &= a_1 + a_2 &&= 12 &&\cdots ② \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 &&= 21 &&\cdots ③ \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &&= 32 &&\cdots ④ \end{aligned}$$

a_1 は ① よりそのまんまで $a_1 = 5$.
a_2 は ② − ① より $a_2 = 7$.
a_3 は ③ − ② より $a_3 = 9$.
a_4 は ④ − ③ より $a_4 = 11$.
よって，$a_1 \sim a_4$ が決定しました．

思ってたよりカンタンやった―
OK

$a_2 \sim a_4$ が式の引き算で求めているのに対し，a_1 だけが S_1 の値から決まっていることに注意しよう．

いずれにしても，この計算を続けていけば，S_n から a_n を求めることができそうです．

以上のことを，一般的に検証してみることにしよう．

はーい

S_n から a_n を求める方法

まずは a_1 から求めよう．これは S_1 そのものなので，$\boxed{a_1 = S_1}$ でＯＫ．

次に，$n \geqq 2$ のとき，

S_{n-1} を考えるにあたっては $n \geqq 2$ だということ。

$a_1 \sim a_{n-1}$ の部分が消えてなくなります。

スッキリ～

$$\begin{array}{rrcl} & S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ -) & S_{n-1} & = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-2} + a_{n-1} \\ \hline & S_n - S_{n-1} & = & a_n \end{array}$$

S_n が n 番目までの和なので S_{n-1} は $n-1$ 番目までの和になります

でないと S_0 が登場してしまいます

なので，$a_n = S_n - S_{n-1}$.

つまり，a_n は S_n と S_{n-1} の差で表すことができます．以上をまとめると，

▷Point◁(S_n と a_n の関係)

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n = 1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2) \end{cases}$$

さっきの具体例を思い出そう．

よって，先ほどの **例題** を考えてみると，$S_n = n^2 + 4n$ のとき，

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = 1^2 + 4 \times 1 = 5$

$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 4n - \{(n-1)^2 + 4(n-1)\} \\ &= n^2 + 4n - (n^2 - 2n + 1 + 4n - 4) \\ &= 2n + 3 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

となります．

ここで，① において，$n = 1$ を代入すると，$a_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 5$ となり，$a_1 = 5$ に一致します．

よって，① は $n \geqq 1$ で成立することがわかるので，最終的に，

$$a_n = 2n + 3$$

が答えになります．

注 S_{n-1} は，S_n の式で n の代わりに $n-1$ を代入すれば求められます．

注 本来は $n \geqq 2$ でしか成立しないはずなんやけど，たまたま $n = 1$ を代入したら一致してしまったので，$n \geqq 1$ で成立することにしちゃおう，ということです．本質的に階差数列の問題と同じノリですね．

フムフム

例題 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ．

(1) $S_n = 2^{n+2} - 4$　　(2) $S_n = n^3 + 2$

解 (1)

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = 2^3 - 4 = 4$.

$n \geqq 2$ のとき，← 必ず述べる

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^{n+2} - 4 - \{2^{n+1} - 4\} \\ &= 2^{n+2} - 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

ところで，① において，$n = 1$ を代入すると，$a_1 = 2^{1+1} = 4$ となり，$a_1 = -2$ に一致する．よって，① は $n \geqq 1$ で成立する．

$$\therefore \ a_n = 2^{n+1}$$

■

(2)

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$

$n \geqq 2$ のとき，← 必ず主張する．

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^3 + 2 - \{(n-1)^3 + 2\} \\ &= n^3 + 2 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 2) \\ &= 3n^2 - 3n + 1 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

$$\therefore \ a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1) \\ 3n^2 - 3n + 1 & (n \geqq 2) \end{cases}$$

■

注 この場合は，① において $n = 1$ を代入しても，a_1 に一致しないので，① は $n \geqq 2$ でしか成立しません．だから，解答も分けて表記します．

なお，一致しないことをわざわざ述べる必要はありません．

参考 一般的に，$S_0 = 0$ ならば一致し，$S_0 \neq 0$ ならば一致しません．つまり最初から分かってるんですね．このことを知っておくと焦らずにすみます．

ナルホド～
これで安心!!