2　S_n が a_n などを用いて表されている場合

さっきと
どう違うのかなー

⇨注　この内容は，漸化式の一種と考えて $\boxed{\text{Type ⑮}}$ とします．

例題　初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = n - a_n$ で表されるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

考え方　先ほども言いましたが，$S_1 = a_1$ です．アタリマエです．

初項 a_1 は
自分で求めるんだよ

解　まず始めに，a_1 を求める．$S_n = n - a_n$ に $n = 1$ を代入すると，$S_1 = 1 - a_1$．

$S_1 = a_1$ なので，$a_1 = 1 - a_1$．よって，$a_1 = \dfrac{1}{2}$．

また，$S_{n+1} = (n+1) - a_{n+1}$ より，

$$\begin{array}{rcccl} S_{n+1} & = & (n+1) & - & a_{n+1} \quad \cdots① \\ S_n & = & n & - & a_n \quad \cdots② \end{array}$$

①－②より，$S_{n+1} - S_n = 1 - a_{n+1} + a_n$．

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ なので，$a_{n+1} = 1 - a_{n+1} + a_n$．

よって，

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$$

これは
定番の
漸化式

OK

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)$$

$$\begin{aligned} a_n - 1 &= (a_1 - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

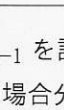
$$\therefore\ a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

わりと簡単に
できたなー

OK

⇨注　この解法を紹介すると必ず出てくる質問は，

> さっきの問題では，$n \geqq 2$ として，$S_n - S_{n-1}$ を計算したのに，なんで今回は，n の場合分けをせずに $S_{n+1} - S_n$ を考えたんですか？この方が n の場合分けがなくて楽やから，さっきの問題でも，$S_{n+1} - S_n$ を考えればよかったんじゃないですか？



ほんまや～なんで？

というもの．確かにそう思うのも無理ないです．結論を延べます．

エッ？

さっきの問題は絶対に $n \geqq 2$ として，$S_n - S_{n-1}$ を計算せねばならないが，今回の場合はどっちでもいい

ホンマ？

試しに今回の問題を $n \geqq 2$ として，$S_n - S_{n-1}$ を計算する方法でやってみます（当該個所だけ）．

解　$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{array}{rcccl} S_n & = & n & - & a_n \quad \cdots① \\ S_{n-1} & = & (n-1) & - & a_{n-1} \quad \cdots② \end{array}$$

①－②より，$S_n - S_{n-1} = 1 - a_n + a_{n-1}$．

$S_n - S_{n-1} = a_n$ なので，$a_n = 1 - a_n + a_{n-1}$．

よって，

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geqq 2)$$

アレレ…？

つまり…

（以下，略）

気付いた人もいるかもしれませんが，

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ から出てきた漸化式

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} \quad (n \geqq 1)$$

と，$S_n - S_{n-1} = a_n$ $(n \geqq 2)$ から出てきた漸化式

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geqq 2)$$

は，全く同じ漸化式です．n の条件が異なるから，漸化式としても異なるのかと一瞬思ってしまいますが，初めの漸化式に $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ を代入すると，a_1 と a_2，a_2 と a_3，a_3 と a_4，$\cdots$ の関係が得られ，後ろの漸化式に $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ を代入すると，a_1 と a_2，a_2 と a_3，a_3 と a_4，$\cdots$ の関係が得られます．つまり，両者の漸化式は全く同じ漸化式であると結論できます．

「漸化式とは項と項の関係を表す関係式に過ぎない」という原点に立ち返ってください．

そーいう
ことかー

最後に応用問題を紹介しておこう．

ちょっと感じがちがう…

例題 数列 $\{a_n\}$ が $a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n=n(n+1)$ をみたすとき，一般項 a_n を求めよ．

こまったなー

考え方 「アレッ？　$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ のはずなのに，ちょっと変・・・」と思うかもしれません．しかし，$a_1+2a_2+\cdots\cdots+na_n$ が何らかの数列の和になっていることは確かです．とすれば・・・

解 $na_n=b_n$ とおく．

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n$$

なので，$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n$ とおけば，

$$T_n=n(n+1)$$

新しい数列を作ったわけか!!

ナルホドー

となる．

$n=1$ のとき，$b_1=T_1=1\times(1+1)=2$.

$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}b_n&=T_n-T_{n-1}\\&=n(n+1)-(n-1)n\\&=2n\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ところで，① において，$n=1$ を代入すると，$b_1=2\cdot 1=2$ となり，$b_1=2$ に一致する．

よって，① は $n\geqq 1$ で成立する．

$$\therefore\ b_n=2n$$

したがって，$a_n=\dfrac{b_n}{n}=\dfrac{2n}{n}=2$

■

注 ようするに，いきなり a_n を求めるのではなく，$na_n=b_n$ と置き換えて，T_n から b_n を求めるのです．b_n が分かれば，a_n も分かります．

注 結局，数列 $\{a_n\}$ は全ての項が 2 である定数列だったということです．

京大数学かかってこい!!

例題 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=0$，$a_2=1$，$(n-1)^2a_n=S_n$ $(n\geqq 1)$ をみたすとき，一般項 a_n を求めよ．

（2002 年　京都大学前期文系）

考え方 天下の京都大学の問題ですが，基本に忠実にやれば大丈夫です．

解 $(n-1)^2a_n=S_n$ …① より，

$n^2a_{n+1}=S_{n+1}$ …②

②－① より，

$n^2a_{n+1}-(n-1)^2a_n=S_{n+1}-S_n$

$n^2a_{n+1}-(n-1)^2a_n=a_{n+1}$

$(n^2-1)a_{n+1}=(n-1)^2a_n$

$(n+1)(n-1)a_{n+1}=(n-1)^2a_n$

よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n\quad\cdots(※)$$

したがって，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{n-2}{n}a_{n-1}\\&=\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}\\&\cdots\cdots\\&=\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_2\\&=\frac{2a_2}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\end{aligned}$$

このタイプの漸化式の解き方は，またいずれ解説します。

スペースの都合で省略していますがどんどん約分しているのです。

ふーん

よって求める一般項は

$$a_n=\begin{cases}0 & (n=1)\\ \dfrac{2}{n(n-1)} & (n\geqq 2)\end{cases}$$

■

注 (※) より，$(n+1)na_{n+1}=n(n-1)a_n$ とすれば，$n(n-1)a_n$ は一定であることが分かるので，$n(n-1)a_n=2\cdot 1\cdot a_2$ より，$a_n=\dfrac{2a_2}{n(n-1)}$ としても構いません．

参考 この問題は文系用ですが，この年の理系は次のような問題でした．意欲的な人は挑戦しよう．

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，$n(n-2)a_{n+1}=S_n$ $(n\geqq 1)$ をみたすとき，一般項 a_n を求めよ．

（2002 年　京都大学前期理系）

なんで $\lim\limits_{n\to\infty}$ があるねん!!