赤阪正純（http://inupri.web.fc2.com）

"ざんかしき"ではありません（笑）

漸（ぜん）↔斬（ざん）

漸化式（ぜんかしき）は数列のDNA

漸化式は、数列のみならず他の分野とも深く関わる重要な概念です。

数列の特徴（規則性）を項と項の間の関係に注目して表現した式が漸化式です．

例えば，

$$a_{n+1} = a_n + 3 \qquad \cdots \overset{+3}{\curvearrowright} a_n,\ a_{n+1} \cdots$$

という関係式は「(どこでもいいから)n 番目の項に3を足したら隣の $n+1$ 番目になる」ということを表現しており，このことはつまり，数列 $\{a_n\}$ が公差3の等差数列であることを意味しています．

$$a_{n+1} = a_n + 3 \iff \text{公差3の等差数列}$$

要するに「公差3の等差数列」と言う代わりに「$a_{n+1} = a_n + 3$ が成立する」と言えばよいのです．

また，

$$b_{n+1} = 2b_n \qquad \cdots \overset{\times 2}{\curvearrowright} b_n,\ b_{n+1} \cdots$$

という関係式は「(どこでもいいから)n 番目の項に2をかけたら隣の $n+1$ 番目になる」ということを表現しており，このことはつまり，数列 $\{b_n\}$ が公比2の等比数列であることを意味しています．

$$b_{n+1} = 2b_n \iff \text{公比2の等比数列}$$

要するに「公比2の等比数列」と言う代わりに「$b_{n+1} = 2b_n$ が成立する」と言えばよいのです．

シンプルな表現や スッキリ〜

このように項と項の間の関係式を見れば，どのような数列なのか（ある程度）わかりますし，いちいち言葉で説明するよりも，スッキリと表現できるので便利なのです．つまり，『漸化式』とは，その数列の性質をスッキリと簡潔に表現した式のことで，『漸化式』を見れば，その数列がどんな数列なのかが大体わかるのです（だから，ある意味『漸化式』とは数列のDNAみたいなもんやとも言えます）．

さて，次の2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はいずれも公差3の等差数列ですが，全く異なる数列です．

$$\{a_n\}:\ 1,\ \overset{+3}{\curvearrowright}\ 4,\ \overset{+3}{\curvearrowright}\ 7,\ \overset{+3}{\curvearrowright}\ 10,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \overset{+3}{\curvearrowright}\ a_{n+1},\ \cdots, \Longrightarrow a_{n+1} = a_n + 3$$

$$\{b_n\}:\ -1,\ \underset{+3}{\curvearrowright}\ 2,\ \underset{+3}{\curvearrowright}\ 5,\ \underset{+3}{\curvearrowright}\ 8,\ \cdots\cdots,\ b_n,\ \underset{+3}{\curvearrowright}\ b_{n+1},\ \cdots, \Longrightarrow b_{n+1} = b_n + 3$$

ちがう数列やのに項と項の関係は全く同じやな〜

漸化式はいずれも，$a_{n+1} = a_n + 3$，$b_{n+1} = b_n + 3$ となりますが，この漸化式だけでは，2つの数列を区別することはできません．あくまでも項と項の間の関係式に過ぎないからです．

どーやって区別すんの？

そこで，初期条件（初項のこと）を追加します．

$$\{a_n\}:\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots, \Longleftrightarrow a_{n+1} = a_n + 3,\ \underline{a_1 = 1}$$

$$\{b_n\}:\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \cdots\cdots,\ b_n,\ b_{n+1},\ \cdots, \Longleftrightarrow b_{n+1} = b_n + 3,\ \underline{b_1 = -1}$$

初期条件

こうすれば，もとの数列が完全に決定します．

それでは，漸化式に $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ を順番に代入して，漸化式からもとの数列を作ってみよう．

$\boxed{a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n + 3}$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 &= 4 \\ a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 &= 7 \\ a_4 = a_3 + 3 = 7 + 3 &= 10 \end{aligned}$$

$a_1 = 3$ からスタートし $a_{n+1} = a_n + 3$ に $n = 1, 2, 3, \cdots$ を順に代入します

$\{a_n\}:\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots\cdots,$

$\boxed{b_1 = -1,\ \ b_{n+1} = b_n + 3}$

$$\begin{aligned} b_1 &= -1 \\ b_2 = b_1 + 3 = -1 + 3 &= 2 \\ b_3 = b_2 + 3 = 2 + 3 &= 5 \\ b_4 = b_3 + 3 = 5 + 3 &= 8 \end{aligned}$$

$b_1 = -1$ からスタートし $b_{n+1} = b_n + 3$ に $n = 1, 2, 3 \cdots$ を順に代入します

$\{b_n\}:\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \cdots\cdots,$

数列が〜 生まれてきたン〜

このように，初期条件と漸化式を順番に繰り返し用いることで，もとの数列を作り出すことができます．

なるほど〜

フムフム

㊟"打出の小槌"とは？
振れば望みの品が出てくるという小さなハンマー

赤阪正純（http://inupri.web.fc2.com）

ほしいもの
お金，エサ，
愛…

▷Point◁（☆漸化式の基本理念☆）

数列から漸化式が作られるのではなく，**漸化式から数列が作られるという発想**が大切．
漸化式が与えられれば，もとの数列が完全に復元できる．
つまり，『漸化式』とは数列を生み出す「打出の小槌」である．（ウチデノコヅチって知ってる？）㊟

他の漸化式の場合でも，具体的にもとの数列を復元してみよう．漸化式から数列が生み出されるのね～

スゲ～

$a_1 = 3,\quad a_{n+1} = 2a_n$
→ n 番目を 2 倍すると $n+1$ 番目になる

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 = 2a_1 = 2\cdot 3 &= 6 \\
a_3 = 2a_2 = 2\cdot 6 &= 12 \\
a_4 = 2a_3 = 2\cdot 12 &= 24
\end{aligned}
$$

2倍する
〃
〃

$\{a_n\}$ ： 3, 6, 12, 24, ……,

完成

$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + 3$
→ n 番目を 2 倍して 3 を足すと $n+1$ 番目になる

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 = 2a_1 + 3 = 2\cdot 1 + 3 &= 5 \\
a_3 = 2a_2 + 3 = 2\cdot 5 + 3 &= 13 \\
a_4 = 2a_3 + 3 = 2\cdot 13 + 3 &= 29
\end{aligned}
$$

2倍して3たす
〃
〃

$\{a_n\}$ ： 1, 5, 13, 29, ……,

復元

$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = -3a_n + 1$
→ n 番目を -3 倍して 1 足すと $n+1$ 番目になる

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 = -3a_1 + 1 = -3\cdot 1 + 1 &= -2 \\
a_3 = -3a_2 + 1 = -3\cdot(-2) + 1 &= 7 \\
a_4 = -3a_3 + 1 = -3\cdot 7 + 1 &= -20
\end{aligned}
$$

−3倍して1たす
〃
〃

$\{a_n\}$ ： 1, −2, 7, −20, ……,

誕生

$a_1 = 0,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2n$
→ n 番目を 3 倍して $2n$ を足すと $n+1$ 番目になる

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
a_2 = 3a_1 + 2 = 3\cdot 0 + 2 &= 2 \\
a_3 = 3a_2 + 4 = 3\cdot 2 + 4 &= 10 \\
a_4 = 3a_3 + 6 = 3\cdot 10 + 6 &= 36
\end{aligned}
$$

3倍して2たす
3倍して4たす
3倍して6たす

⇨注　足す数が変化していることに注意しよう．

$\{a_n\}$ ： 0, 2, 10, 36, ……,

感動

「漸化式を解く」とは

さて，漸化式からもとの数列が復元できることは分かりました．では，その数列の一般項（n 番目）はどうなるのでしょうか．求めることができるのでしょうか．

しらん

「漸化式を解く」とは，与えられた漸化式から作り出される数列の一般項を求めること，つまり，第 n 項 a_n を n の式で表すことをいいます．このことが漸化式学習の中心テーマとなります．

でも，いちいち数列を復元してから一般項を考えるのではなく，漸化式のままで，もとの数列の一般項を考えます．漸化式を変形したり，置き換えたりして，一般項を求めるのです．

実を言うと，漸化式を見てその数列がどんな性質の数列なのかがパッとわかることはほとんどありません．「じゃあ，ど～すんねん」って話になりますが，漸化式には基本的な型と決まった解き方があって，規則性が分からなくても，その解法パターンを暗記しさえすれば一般項は簡単に求まるのです．つまり，マニュアルに従った典型的なパターン学習です．これから，この基本形と解法パターンを順番に学んでいきましょう．

よ～し
がんばるゾー

オー