3 項間の漸化式の解法を学ぶ

サンコーカンって何？

これまでの漸化式は，a_{n+1} を a_n の式で表すという a_n と a_{n+1} の 2 項間の関係式でしたが，今回の 3 項間漸化式とは，a_n と a_{n+1} と a_{n+2} の関係式で，一般的に $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ という形で表されます．この Type の漸化式もノーヒントで出題されることはほとんどありませんが，誘導を見てあれこれと考えるよりは，仕組みを理解して，やりかたを憶えてしまった方が良いでしょう．

はーい
とりあへず おぼえまーす

▷Point◁(基本的な流れ)

3 項間漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ が，次のような理想的な形に変形できた と仮定する．

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0 \iff \begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$

エッ？
いきなり？
かまへんの？

このとき，

$$\boxed{a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)} \quad \cdots ①$$

なぜなら
$a_{n+1}-\alpha a_n=b_n$ とおくと
$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=b_{n+1}$ なので
① は $b_{n+1}=\beta b_n$
つまり 初項 $b_1=a_2-\alpha a_1$
公比 β になっています。

数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は
初項 $a_2-\alpha a_1$
公比 β の
等比数列です。

$$\boxed{a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}} \quad \cdots ①'$$

$$\boxed{a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)} \quad \cdots ②$$

なぜなら
$a_{n+1}-\beta a_n=c_n$ とおくと
$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=c_{n+1}$ なので
② は $c_{n+1}=\alpha c_n$
つまり 初項 $c_1=a_2-\beta a_1$
公比 α になっています

数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は
初項 $a_2-\beta a_1$
公比 α の
等比数列です。

$$\boxed{a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}} \quad \cdots ②'$$

①′ − ②′ より，

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1}-\alpha a_n & = & (a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1} \\ -) & a_{n+1}-\beta a_n & = & (a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1} \\ \hline & (-\alpha+\beta)a_n & = & (a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1} \end{array}$$

①′−②′ を
計算します。

a_{n+1} が消えます

a_n だけが
残るのね…
うまいこと
なっとるわ

$$\boxed{\therefore\ a_n=\frac{1}{\beta-\alpha}\{(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}\}}$$

やっと求まったー
あーしんどかったー

⇨注 「3 項間漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ が，次のような理想的な形に変形できた と仮定する．」という部分に引っかかるかもしれません．しかし，これと似たような状況は過去にも登場しています．それは，2 項間漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ の解法です．あのとき「2 項間漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ が $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ という理想的な形に変形できたと仮定すると，係数比較すれば $\alpha=p\alpha+q$ という関係式が登場し，この関係式が $a_{n+1}=pa_n+q$ で a_{n+1} と a_n を α とおきかえた式に偶然たまたま一致してしまっている．」というのが解法の流れでした．

$$a_{n+1}=pa_n+\underline{q} \iff a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha) \iff a_{n+1}=pa_n+\underline{\alpha-p\alpha}$$

係数比較して，$q=\alpha-p\alpha$.　　$\therefore\ \alpha=p\alpha+q$

3 項間漸化式の解法もこれと同じような手法をとります．このことをしっかり頭にいれておこう．

はーい。

しかしながら，次のような疑問もわきます．

疑問　おしえて〜

上の方法では α と β を用いて a_n を求めていますが，その α と β は，どうやって求めるんですか．

答え　そうですね．もっともな質問です．

2 つの関係式

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

を整理すると，共に，

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

あら．同じ式になったよ

となるので，$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ と係数を比較すると，

$$p = -(\alpha + \beta),\ q = \alpha\beta$$

よって，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$ だから，解と係数の関係より，α，β は 2 次方程式

$$t^2 + pt + q = 0$$

←この式を解けば．α．βがわかりますよ。

ふーん

の 2 つの解になります．この 2 次方程式は漸化式 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ において，

$$a_{n+2} \longrightarrow t^2,\quad a_{n+1} \longrightarrow t,\quad a_n \longrightarrow 1$$

と置き換えた式に偶然たまたま一致しています．

うわっ ほんまや．ふっしぎ〜

▷Point◁(α，β の求め方)

漸化式 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ において，$a_{n+2} \to t^2$，　$a_{n+1} \to t$，　$a_n \to 1$　と置き換えた式 $t^2 + pt + q = 0$ を解けば，α，β が求められる．

⇨**注**　この t の 2 次方程式のことを**特性方程式**といいます．特性方程式の計算は答案の表には出さずに，裏でコソッとやりましょう．

疑問　おしえて〜

特性方程式 $t^2 + pt + q = 0$ を解けば α と β を求められることはわかりましたが，この 2 次方程式は必ず異なる 2 つの実数解をもつんですか．重解 ($\alpha = \beta$) の場合や，虚数解の場合はどうなるんですか．

答え　そうですね．これももっともな質問です．確かに，重解の場合は 1 通りにしか式変形できませんが，そのまま計算を進めると，以前に登場した 2 項間漸化式に帰着されるので問題ありません．また虚数解の場合は高校段階では登場しませんが，もし虚数解をになったとしても気にせずそのままやってください．大丈夫です．

よかった〜　ちょっと安心したよ

よって，3 項間漸化式 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ は，特性方程式 $t^2 + pt + q = 0$ の解の様子によって次の 2 つの Type に分類されます．

- 特性方程式が異なる 2 つの解をもつ ……Type ⑪
- 特性方程式が重解をもつ ……Type ⑫

それでは具体例を通して考えていくことにしよう．

具体例が一番やね

イメージしやすいね