Type ⑪　特性方程式 $t^2+pt+q=0$ が異なる 2 つの解をもつタイプ

例題 次の漸化式を解け．　$a_1=0,\ \ a_2=1,\ \ a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$

解 (特性方程式 $t^2=5t-6$ より，$(t-2)(t-3)=0$．よって $t=2,\ 3$) ← ナイショの計算♡

漸化式より，

$$\begin{cases} a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

① より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 a_2-2a_1，公比 3 の等比数列なので，

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)3^{n-1}=3^{n-1} \quad \cdots ①'$$

② より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 a_2-3a_1，公比 2 の等比数列なので，

$$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)2^{n-1}=2^{n-1} \quad \cdots ②'$$

①′ − ②′ より，

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1}-2a_n & = & 3^{n-1} \\ a_{n+1}-3a_n & = & 2^{n-1} \\ \hline a_n & = & 3^{n-1}-2^{n-1} \end{array}$$

■

注 ① から ①′ への変形が分かりにくい人は，$a_{n+1}-2a_n=b_n$ と置き換えて考えると良いでしょう．このとき，$a_{n+2}-2a_{n+1}=b_{n+1}$ なので，① は $b_{n+1}=3b_n$ となり，初項 $b_1=a_2-2a_1$，公比 3 の等比数列であることが分かります．

例題 次の漸化式を解け．　$a_1=1,\ \ a_2=2,\ \ a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$

解 (特性方程式 $t^2+3t-4=0$ より，$(t+4)(t-1)=0$．よって $t=-4,\ 1$) ← ナイショの計算♡

漸化式より，

$$\begin{cases} a_{n+2}+4a_{n+1}=1(a_{n+1}+4a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2}-1a_{n+1}=-4(a_{n+1}-1a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

① より，数列 $\{a_{n+1}+4a_n\}$ は初項 a_2+4a_1，公比 1 の等比数列なので，

$$a_{n+1}+4a_n=(a_2+4a_1)1^{n-1}=6 \quad \cdots ①'$$

② より，数列 $\{a_{n+1}-1a_n\}$ は初項 a_2-1a_1，公比 −4 の等比数列なので，

$$a_{n+1}-1a_n=(a_2-1a_1)(-4)^{n-1}=(-4)^{n-1} \quad \cdots ②'$$

①′ − ②′ より，

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1}+4a_n & = & 6 \\ a_{n+1}-1a_n & = & (-4)^{n-1} \\ \hline 5a_n & = & 6-(-4)^{n-1} \end{array}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{6-(-4)^{n-1}}{5}$$

さっきと同じやん

■

注 以上，全く同じ方法で解きましたが，この **例題** のように，特性方程式の解に $t=1$ がある場合は，実はとても簡単に解くことができます．①′ の式を見て何か気づきませんか．

$$a_{n+1}+4a_n=6 \iff a_{n+1}=-4a_n-6$$

そうです．Type ③．つまり，このおなじみの漸化式を解けばよいだけです．② は不要になります．

つまり，一方だけの式で解決するのですね

追加　②′の式も $a_{n+1}-a_n=(-4)^{n-1}$ なので階差数列により解けます。①は不要。

Type ⑫　特性方程式 $t^2+pt+q=0$ が重解をもつタイプ

例題　次の漸化式を解け．　$a_1=1,\ \ a_2=4,\ \ a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

考え方　特性方程式が重解をもつ場合は，たしかに式変形は1つしかできませんが，これまでに学習したTypeの漸化式に帰着されるので，特に問題なく解くことができます．　よかった～

解　（特性方程式 $t^2-6t+9=0$ より，$(t-3)^2=0$．よって $t=3$（重解））← ナイショの計算♡

漸化式より，

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

よって，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 a_2-3a_1，公比3の等比数列なので，

$$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)3^{n-1}=3^{n-1}$$

$$a_{n+1}=3a_n+3^{n-1}$$ ← Type ⑤ の漸化式

指数型!!

☆☆ 両辺を 3^{n+1} で割ると，

この変形はとても大切

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{3a_n}{3^{n+1}}+\frac{3^{n-1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{9}$$

よって，$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{9}$$ ← Type ① の漸化式

つまり，数列 $\{b_n\}$ は，初項 b_1，公差 $\dfrac{1}{9}$ の等差数列なので，

$$\begin{aligned} b_n-1&=b_1+(n-1)\cdot\frac{1}{9}\\ &=\frac{a_1}{3^1}+(n-1)\cdot\frac{1}{9}\\ &=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{9}\\ &=\frac{n+2}{9}\end{aligned}$$

このへんは大丈夫だね

OK

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より，

$$a_n=3^nb_n=3^n\cdot\frac{n+2}{9}=(n+2)3^{n-2}$$

■

3項間漸化式はもうマスターしたぞ

完ペキ～

参考　『フィボナッチ数列』について

フィボナッチ数列とは，次のような数列のことです．

1,　1,　2,　3,　5,　8,　13,　21,　34,　55,　89,　144,　233,　377, ……

数列の規則性はなんとなく分かると思います．漸化式で表すと，

$$a_1=a_2=1,\ \ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \qquad (a_1=0,\ \ a_2=1 \text{ とする場合もあります})$$

まさに3項間漸化式です．一般項を求めてみると，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

シンプルな数列なのに一般項はなんと複雑なの？

ふっしぎ～

となります（各自で求めておこう．特性方程式の解は $t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$）．

数列の各項は全て整数なのに一般項の式に $\sqrt{5}$ が混在するのは不思議な気がしますが，不思議なのはそれだけではありません．フィボナッチ数列には我々の想像を超えた不思議な秘密がたくさん詰まっています．特に自然界との関わりという点で，身近な所にフィボナッチ数列に関する話題がたくさんあります．

『自然にひそむ数学』（講談社ブルーバックス）という本に詳しく書かれていますので，興味を持った人はぜひ読んでみてください．

はーい　読んでみます。

フィボナッチ数列については，またの機会に…