# $a_{n+1}=pa_n+q$ 型の漸化式の解法を学ぶ

前回のプリントでも紹介したように，「漸化式」とは，数列を決定つける DNA みたいなもんで，漸化式からもとの数列を作り出すことができます．漸化式から作り出された数列の一般項を求めることを「漸化式を解く」といい，これからの学習のメインとなります．

漸化式には様々な型がありますが，まずは基本中の基本である，$a_{n+1}=pa_n+q$ 型（$p$，$q$ は定数）の漸化式から学習することにしよう．

この型は，この後に続くあらゆる漸化式の基礎となります．なぜなら，どんな複雑な漸化式でも，変形したり置き換えしたりすれば，この型に帰着できるからです．したがって，その仕組みをしっかりと理解し，完璧に解けるようになる必要があります．

## 漸化式の基本は，まずはここからです！！！！

そんな大げさに言わんでもエエせん

さて，最初に注意したいことは，$p$，$q$ は定数である ということ．つまり，絶対に，$p$ や $q$ に $n$ を含んではいけないのです．

nに関係ない数ってこと。とても重要!!

⇒注　$p$ や $q$ の部分に $n$ が入る漸化式は，また後ほど扱います．

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型は，定数 $p$，$q$ の値によって，次の 3 つの Type に分かれます．

$$\begin{cases} p=1 \text{ のとき} & a_{n+1}=a_n+q & \cdots\cdots \boxed{\text{Type ①}} \\ q=0 \text{ のとき} & a_{n+1}=pa_n & \cdots\cdots \boxed{\text{Type ②}} \\ p\neq 1,\ q\neq 0 \text{ のとき} & a_{n+1}=pa_n+q & \cdots\cdots \boxed{\text{Type ③}} \end{cases}$$

漸化式をみて数列がイメージできるかな？

うん

それぞれの Type を順番に見ていくことにしよう．

**Type ①**　$a_{n+1}=a_n+q$　（$q$ は定数）

この漸化式は，「(どこでもいいから)$n$ 番目の項に $q$ を足したら隣の $n+1$ 番目になる」ということを表現しており，このことはつまり，数列 $\{a_n\}$ が公差 $q$ の等差数列であることを意味しています．

▷Point◁

$a_{n+1}=a_n+q$ ⟶ 公差 $q$ の等差数列．　$\cdots, a_n \xrightarrow{+q} a_{n+1}, \cdots$

意味を考えたらあたりまえ

うん

⇒注　当然ながら，$q$ が定数の場合に限ります．

この Type は，数列 $\{a_n\}$ が，単なる公差 $q$ の等差数列なので，等差数列の公式を利用すれば一般項を求めることができます．

初項 $a_1$，公差 $d$ の等差数列の一般項は，$a_n=a_1+(n-1)d$ です．今さらですが，念のため……

知ってるもーん

OK

**例題** 次の漸化式を解け.

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n-2$$

**解** 漸化式より数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公差 $-2$ の等差数列なので,

$$a_n=1+(n-1)(-2)=-2n+3$$

これは楽勝!!　よゆー　■

⇨**注** いきなり「初項 1, 公差 $-2$ の等差数列なので」と断言して解答しましたが, 念のため, 具体的に書き出して調べてみると,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2=a_1-2=1-2 &= -1 \\ a_3=a_2-2=-1-2 &= -3 \\ a_4=a_3-2=-3-2 &= -5 \end{aligned}$$

+2　+2　+2

$\{a_n\}$ : 1,　$-1$,　$-3$,　$-5$,　……,

となり, 確かに, 初項 1, 公差 $-2$ の等差数列になっていることがわかります.

フムフム　たしかにそうなってるな

## Type ②　$a_{n+1}=pa_n$　($p$ は定数)

この漸化式は,「(どこでもいいから)$n$ 番目の項を $p$ 倍すれば, 隣の $n+1$ 番目になる」ということを表現しており, このことはつまり, 数列 $\{a_n\}$ が公比 $p$ の等比数列であることを意味しています.

▷Point◁

$a_{n+1}=pa_n$ ⟶ 公比 $p$ の等比数列.　… $a_n$, $a_{n+1}$, … (×p)

意味を考えたらあたりまえ　そうやな

⇨**注** 当然ながら, $p$ が定数の場合に限ります.

この Type は, 数列 $\{a_n\}$ が, 単なる公比 $p$ の等比数列なので, 等比数列の公式を利用すれば一般項を求めることができます.

初項 $a_1$, 公比 $r$ の等比数列の一般項は, $a_n=a_1r^{n-1}$ です. 今さらですが, 念のため……　OK　知ってるよー

**例題** 次の漸化式を解け.

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=3a_n$$

**解** 漸化式より, 数列 $\{a_n\}$ は初項 2, 公比 3 の等比数列なので,

$$a_n=2\cdot 3^{n-1}$$

これも楽勝!!　よゆー　■

⇨**注** いきなり「初項 2, 公比 3 の等比数列なので」と断言して解答しましたが, 念のため, 具体的に書き出して調べてみると,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2=3a_1 &= 6 \\ a_3=3a_2 &= 18 \\ a_4=3a_3 &= 54 \end{aligned}$$

×3　×3　×3

$\{a_n\}$ : 2,　6,　18,　54,　……,

となり, 確かに, 初項 2, 公比 3 の等~~差~~比数列になっていることがわかります.

たしかにそのとおり

このように, Type ① と Type ② の漸化式は単なる等差数列, 等比数列に過ぎないので,「漸化式を解け」といわれても, 要するに, 一般項の公式に当てはめているだけで, 特にどうってことありません.

今のところ大丈夫　OK