連立漸化式の解き方

今度はレンリツですか…
いろいろあるんやねぇ〜

連立漸化式とは，その名のとおり $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ という形の漸化式で，2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ があって，a_{n+1} や b_{n+1} が「a_n と b_n」から定まることを意味しています．ややこしそうですが，連立漸化式はあくまでも「連立」漸化式ですから，解法も普通の連立方程式の場合と同様に 2 通りの解法があります．

▷Point◁

解法 ①　2 つの漸化式をうまく組み合わせて置き換えをして処理する (加減法的解法).
⟶ どのように組み合わせるのかは状況による (たいてい誘導がある).

解法 ②　一方の漸化式を (少し変形して) 他方の漸化式に代入し，数列 $\{a_n\}$ または数列 $\{b_n\}$ だけの漸化式を作る (代入法的解法).
⟶ たいてい 3 項間漸化式に帰着する.

連立漸化式は，係数の状況によって解き方に違いがあります．詳しく調べることにしよう．

はぁ〜い

1　ナナメの係数が等しい場合

Type ⑬　$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = qa_n + pb_n \end{cases}$ ⟶ ナナメの係数が等しいタイプ

ナナメの係数が等しいタイプの漸化式は，ノーヒントで出題されることがまれにあります．

マジで〜?

例題 1　次の漸化式を解け.

$$a_1 = 1,\ \ b_1 = 3,\ \ \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots① \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n & \cdots② \end{cases}$$

解法 ①　(加減法的解法).

考え方　2 つの漸化式の和 (①+②), 差 (①−②) を考える (辺々を足したり引いたりする).

解

①＋② より，

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_n + 3b_n = 3(a_n + b_n)$$

$a_n + b_n = c_n$ とおくと，$c_{n+1} = 3c_n$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 c_1，公比 3 の等比数列なので，

$$c_n = c_1 3^{n-1} = (a_1 + b_1)3^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore\ \ a_n + b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \ \cdots③$$

①−② より，

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n$$

$a_n - b_n = d_n$ とおくと，$d_{n+1} = d_n$

よって，数列 $\{d_n\}$ は定数列なので，

$$d_n = d_1 = a_1 - b_1 = -2$$

$$\therefore\ \ a_n - b_n = -2 \ \cdots④$$

わりと簡単ですね

よかったー

したがって，

③＋④ より，

$2a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2.\quad \therefore\ \ a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

③−④ より，

$2b_n = 4 \cdot 3^{n-1} + 2.\quad \therefore\ \ b_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$

■

ナナメの係数が同じだから
足したり，引いたりして うまくいくのね

OK

解法② （代入法的解法）.

考え方 ① より，$b_n = a_{n+1} - 2a_n$ なので，これを．② に代入して，数列 $\{a_n\}$ だけの漸化式を作る．

解

① より，$b_n = a_{n+1} - 2a_n$.
よって，$b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1}$.
これらを ② に代入すると，

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_n + 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

3項間漸化式登場

$$\therefore\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$$

うわ～メンドクサ～

Type⑪

（特性方程式 $t^2 - 4t + 3 = 0$ より，
$(t-1)(t-3) = 0$．よって $t = 1,\ 3$）
漸化式より，

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) & \cdots ⑤ \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = 1(a_{n+1} - 3a_n) & \cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤ より，$a_{n+1} - a_n = c_n$ とおくと，$c_{n+1} = 3c_n$
よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 c_1，公比 3 の等比数列なので，

$$c_n = c_1 3^{n-1} = (a_2 - a_1)3^{n-1} = (5-1)\cdot 3^{n-1} = 4\cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{n+1} - a_n = 4\cdot 3^{n-1} \quad \cdots ⑤'$$

⑥ より，$a_{n+1} - 3a_n = d_n$ とおくと，$d_{n+1} = d_n$
よって，数列 $\{d_n\}$ は定数列なので，

$$d_n = d_1 = a_2 - 3a_1 = 5 - 3 = 2$$

$$\therefore\ a_{n+1} - 3a_n = 2 \quad \cdots ⑥'$$

⑤′ − ⑥′ より，

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} - a_n & = & 4\cdot 3^{n-1} \\ a_{n+1} - 3a_n & = & 2 \\ \hline 2a_n & = & 4\cdot 3^{n-1} - 2 \end{array}$$

$$\therefore\ a_n = 2\cdot 3^{n-1} - 1$$

解法①の方が圧倒的に簡単ですね

うん

よって，$a_{n+1} = 2\cdot 3^n - 1$ なので，

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - 2a_n \\ &= 2\cdot 3^n - 1 - 2(2\cdot 3^{n-1} - 1) \\ &= 6\cdot 3^{n-1} - 1 - 4\cdot 3^{n-1} + 2 \\ &= 2\cdot 3^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

■

⇨注　途中で a_2 が登場しますが，これは漸化式から自分で求めます．つまり，$a_2 = 2a_1 + b_1 = 5$.

漸化式①より

⇨注　特性方程式が $t = 1$ を解にもつので，⑥′ からいきなり a_n を求めてもかまいません．当然 ⑤ は不要になります．

2 つの解法を比べると，明らかに 解法① の方が簡単だと思います．式の組み合わせ方がわかっていれば・・・の話ですが．組み合わせ方が分からない場合は，解法② で解くことになります．

うーん　できることなら やりたくないよ～

2　ナナメの係数が等しいとは限らない場合

Type ⑭　$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ ⟶ ナナメの係数が等しいとは限らない一般タイプ

今度は，ナナメの係数が等しいとは限らない一般型タイプの漸化式です．

先ほどの解法を振り返ると，解法① の方が簡単でした．つまり式を上手く組み合わせて解くわけですが，ナナメの係数が等しい場合は，式をそのまま足したり引いたりすれば，何となく上手くいきそうな感じがすると思いますが，ナナメの係数が等しくない場合だと，どうも上手くいきません．では，そのように組み合わせるのでしょうか．それには，必ず誘導があります．

次の 例題 2 や 例題 3 は，「組合せの方法を教えてあげるから，解法① で解きなさいね」と誘導しているがわかりますね．

フムフム