例題 2　次の漸化式を解け．

$$a_1=2,\ b_1=6,\ \begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n & \cdots① \\ b_{n+1}=3a_n+4b_n & \cdots② \end{cases}$$

(1) $\{a_n+b_n\}$, $\{3a_n-b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

考え方　とりあえず指示通りに式を組み合わせてみます．

ラッキ～

解

(1)　① + ② より，

$$a_{n+1}+b_{n+1}=5a_n+5b_n=5(a_n+b_n)$$

$a_n+b_n=c_n$ とおくと，$c_{n+1}=5c_n$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 c_1，公比 5 の等比数列なので，

$$c_n=c_1 5^{n-1}=(a_1+b_1)5^{n-1}=8\cdot 5^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n+b_n=8\cdot 5^{n-1}\ \cdots③$$

① × 3 − ② より，

$$3a_{n+1}-b_{n+1}=3a_n-b_n$$

$3a_n-b_n=d_n$ とおくと，$d_{n+1}=d_n$

よって，数列 $\{d_n\}$ は定数列なので，

$$d_n=d_1=3a_1-b_1=0$$

$$\therefore\ 3a_n-b_n=0\ \cdots④$$

(2)

③ + ④ より，

$4a_n=8\cdot 5^{n-1}$.　$\therefore\ a_n=2\cdot 5^{n-1}$

③ × 3 − ④ より，

$4b_n=24\cdot 5^{n-1}$.　$\therefore\ b_n=6\cdot 5^{n-1}$

■

注　解法②　でも解いてみましょう．

別解　① より，$b_n=a_{n+1}-2a_n$.

よって，$b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$.

これらを ② に代入すると，

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_n+4(a_{n+1}-2a_n)$$

$$\therefore\ a_{n+2}-6a_{n+1}+5a_n=0$$

またまた3項間漸化式!!　Type⑪

(特性方程式 $t^2-6t+5=0$ より，

$(t-1)(t-5)=0$. よって $t=1,\ 5$)

漸化式より，

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n) & \cdots⑤ \\ a_{n+2}-5a_{n+1}=1(a_{n+1}-5a_n) & \cdots⑥ \end{cases}$$

⑤ より，$a_{n+1}-a_n=c_n$ とおくと，$c_{n+1}=5c_n$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 c_1，公比 5 の等比数列なので，

$$c_n=c_1 5^{n-1}=(a_2-a_1)5^{n-1}=(10-2)5^{n-1}=8\cdot 5^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{n+1}-a_n=8\cdot 5^{n-1}\ \cdots⑤'$$

⑥ より，$a_{n+1}-5a_n=d_n$ とおくと，$d_{n+1}=d_n$

よって，数列 $\{d_n\}$ は定数列なので，

$$d_n=d_1=a_2-5a_1=10-10=0$$

$$\therefore\ a_{n+1}-5a_n=0\ \cdots⑥'$$

⑤′ − ⑥′ より，

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1}-a_n & = & 8\cdot 5^{n-1} \\ a_{n+1}-5a_n & = & 0 \\ \hline 4a_n & = & 8\cdot 5^{n-1} \end{array}$$

$$\therefore\ a_n=2\cdot 5^{n-1}$$

やってることは単純だけど…手間が多くて大変…

ひゃ～

よって，$a_{n+1}=2\cdot 5^n$ なので，

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1}-2a_n \\ &= 2\cdot 5^n-2(2\cdot 5^{n-1}) \\ &= 10\cdot 5^{n-1}-4\cdot 5^{n-1} \\ &= 6\cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

■

注　途中で a_2 が登場しますが，これは漸化式から自分で求めます．つまり，$a_2=2a_1+b_1=10$.　← 漸化式①より

注　特性方程式が $t=1$ を解にもつので，⑥′ からいきなり a_n を求めてもかまいません ($\{a_n\}$ は単なる等比数列ですし)．当然 ⑤ は不要になります．

今回もやはり，式の組合せによる最初の解法の方が簡単だと思います．組み合わせ方が分からない場合は，解法②　で解くことになりますがちょっとメンドウです．

そうやねえ…やっぱり解法①がいいねえ…

でも…なんであんなふうに組み合わせたの？

例題 3　次の漸化式を解け．

$$a_1=2,\ \ b_1=1,\ \ \begin{cases} a_{n+1}=2a_n-b_n & \cdots① \\ b_{n+1}=a_n+4b_n & \cdots② \end{cases}$$

(1) $\{a_n+b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

考え方　とりあえず指示通りに式を組み合わせてみます．**例題 2** と違って，組み合わせ方が 1 通りしか指示されていませんね・・・なぜでしょうか？

解

(1)　① + ② より，

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3a_n+3b_n=3(a_n+b_n)$$

$a_n+b_n=c_n$ とおくと，$c_{n+1}=3c_n$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 c_1，公比 3 の等比数列なので，

$$c_n=c_1 3^{n-1}=(a_1+b_1)3^{n-1}=(2+1)3^{n-1}=3^n$$

$$\therefore\ \ a_n+b_n=3^n\ \ \cdots③$$

よって，$b_n=3^n-a_n$ として ① に代入して，

$$a_{n+1}=2a_n-(3^n-a_n)$$

$$a_{n+1}=3a_n-3^n\ \ \cdots(※)$$

指数型 Type ⑤

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{3}$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1}{3^1}$，公差 $-\dfrac{1}{3}$ の等差数列なので，

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{a_1}{3^1}+(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{n}{3}$$

$$\therefore\ \ a_n=3^n-n\cdot 3^{n-1}$$

よって，$b_n=3^n-a_n=n\cdot 3^{n-1}$

■

注　解法 ② でも解いてみましょう．なぜだか特性方程式が重解をもつことになります．

別解　① より，$b_n=2a_n-a_{n+1}$．

よって，$b_{n+1}=2a_{n+1}-a_{n+2}$．

これらを ② に代入すると，

$$2a_{n+1}-a_{n+2}=a_n+4(2a_n-2a_{n+1})$$

$$\therefore\ \ a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$$

3項間漸化式 Type ⑫ 重解パターン!!

(特性方程式 $t^2-6t+9=0$ より，

$(t-3)^2=0$．よって $t=3$(重解))

漸化式より，

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

よって，$a_{n+1}-3a_n=c_n$ とおくと，$c_{n+1}=3c_n$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 c_1，公比 3 の等比数列なので，

$$c_n=c_1 3^{n-1}=(a_2-3a_1)3^{n-1}=(3-6)3^{n-1}=-3^n$$

$$a_{n+1}-3a_n=-3^n$$

$$\therefore\ \ a_{n+1}=3a_n-3^n$$

アレッ？おんなじや．

(以下，最初の **解** の (※) と同じなので省略)

注　途中で a_2 が登場しますが，これは漸化式から自分で求めます．つまり，$a_2=2a_1-b_1=3$．

組み合わせ方が 1通りしかなかったり．？？？
特性方程式が重解もったり・・・　なんで？

3　検証

3 つの連立漸化式を紹介しましたが，それぞれの解法を検証してみよう．

例題 1 はナナメの係数が等しいので和と差を考えました．これは何となくわかりますね．**例題 2** と **例題 3** はナナメの係数が異なる場合ですが，**例題 2** で，なぜ，$\{a_n+b_n\}$ や $\{3a_n-b_n\}$ などと組合せたのでしょうか．解法 ② で解いた場合，**例題 1** と **例題 2** は特性方程式が 2 つの解をもち **例題 3** は特性方程式が重解でした．このことと 解法 ① の組み合わせ方と何らかの関係があるのではないでしょうか．特性方程式が解 1 をもつことも何か意味がありそうです．

まあでも，とりあえず，なんとか解くことができたから，これにて一件落着としましょうかね …… しかし，これまでと同様に，「なぜそのようにするのか」にこだわってその仕組みを解明したいと思います．その理由を知りたい人は，次回は配布する犬プリ「連立漸化式のヒミツ」をお読みください．

ちょこっと勉強してみるか…