連立漸化式のヒミツ

ヒミツ大好き♡

一般的な連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の２つの解法についてまとめてみよう．

1　加減法的解法のヒミツ

２つの漸化式をどのように組み合わせればよいのか検証しよう．

漸化式①と②をうまく組み合わせて

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = k(a_n - \alpha b_n)$$

という式に変形できたと仮定します．

"理想的な形に変形できたとする"
→前にもありました

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha b_{n+1} &= pa_n + qb_n - \alpha(ra_n + sb_n) \\ &= (p - r\alpha)a_n - (s\alpha - q)b_n \\ &= (p - r\alpha)\left(a_n - \frac{s\alpha - q}{p - r\alpha}b_n\right) \\ &= k(a_n - \alpha b_n) \end{aligned}$$

したがって，$k = p - r\alpha$，　$\alpha = \dfrac{s\alpha - q}{p - r\alpha}$ とならねばなりません．このとき，

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{s\alpha - q}{p - r\alpha} &\iff p\alpha - r\alpha^2 = s\alpha - q \\ &\iff \alpha(r\alpha + s) = p\alpha + q \\ &\iff \alpha = \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} \end{aligned}$$

つまり，連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ において，t の方程式 $t = \dfrac{pt + q}{rt + s}$ の解が α になります．

さて，$t = \dfrac{pt + q}{rt + s}$ より，$rt^2 + st = pt + q$．よって，$rt^2 - (p - s)t - q = 0$　…（※）．

この t についての２次方程式（※）の判別式を D_1 とすると，

$$D_1 = (p - s)^2 + 4qr$$

$D_1 \neq 0$ ならば，２つの解を持つので式の組合せ方が２通りできますが，$D_1 = 0$ ならば，式の組合せ方は１通りしかありません．

ナルホド～　組合せ方が何通りあるのかは D_1 で決まるのね

⇨注　組み合わせてできる等比数列の公比 k は

$$k = p - rt = p - \frac{(p - s) \pm \sqrt{D_1}}{2} = \frac{(p + s) \pm \sqrt{D_1}}{2}$$

▷Point◁（まとめ）

連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \cdots\cdots ② \end{cases}$

において，$t = \dfrac{pt + q}{rt + s}$ の解を α，β とすると，数列 $\{a_n - \alpha b_n\}$，$\{a_n - \beta b_n\}$ は等比数列になる．

つまり，①－②×α，①－②×β というように式の辺々を組み合わせればよい．

これがヒミツ～

⇨注　なんとなく気づいている人もいるかもしれませんが，分数型漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ の時の話に似ていませんか．あのときは，a_{n+1} と a_n を共に t と置き換えた式 $t = \dfrac{pt + q}{rt + s}$ を解いてズラス数を求めたのですが，今回の組み合わせ方を調べるための t の方程式と完全に一致しています．なにか秘密がありそうですね．

たしかに…フムフム

2　代入法的解法のヒミツ

代入法的解法では３項間漸化式を解くことになります．特性方程式の解と加減法的解法での式の組み合わせ方に何らかの関係があるのではないか検証しよう．

漸化式①より，$qb_n = a_{n+1} - pa_n$．よって，$qb_{n+1} = a_{n+2} - pa_{n+1}$．

漸化式②より，$qb_{n+1} = qra_n + sqb_n$ なので，これに代入すると，

$$a_{n+2} - pa_{n+1} = qra_n + s(a_{n+1} - pa_n)$$

$$a_{n+2} - (p + s)a_{n+1} + (ps - qr)a_n = 0$$

よって，特性方程式は

$$t^2 - (p + s)t + (ps - qr) = 0 \quad \cdots（※※）$$

この t の 2 次方程式 (※※) の判別式を D_2 とすると，

$$\begin{aligned} D_2 &= (p+s)^2 - 4(ps-qr) \\ &= p^2 + 2ps + q^2 - 4ps + 4qr \\ &= (p-s)^2 + 4qr \end{aligned}$$

アレ？　どっかで見た形してる

特性方程式の解は

$$t = \frac{(p+s) \pm \sqrt{D_2}}{2}$$

3　まとめと検証

2 つの解法を検証してみよう．

まず，2 つの 2 次方程式 (※) と (※※) の判別式が一致しています．

$$D_1 = D_2$$

式は全くちがうのに判別式が同じだなんて!!

このことは，2 つの 2 次方程式 (※) と (※※) の解の個数が一致することを意味しています．

> 加減法的解法で式の組み合わせ方が 1 通りなのか 2 通りなのかは，代入法的解法で 3 項間漸化式の特性方程式が重解をもつのか異なる 2 つの解をもつのかと完全に対応していることが分かる．
>
> 数学ってうまいことなってるなあ〜

どっちの解法も本質的に同じということ

また，特性方程式 (※※) の解と代入法的解法での公比 k が完全に一致していることも分かります．

以上のことを前回紹介した 3 つの 例題 で確認してみよう．

> 例題 1　次の漸化式を解け．
>
> $$a_1 = 1,\ b_1 = 3,\ \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots① \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n & \cdots② \end{cases}$$

$t = \dfrac{2t+1}{t+2}$ より，$t^2 = 1$．$\therefore\ t = \pm 1$．

つまり式の組合せ方は 2 通り（足したり引いたり）あって，公比 k は

$t = 1$ のとき，$k = 1$

$t = -1$ のとき，$k = 3$

したがって，もとの連立漸化式は次のように変形できます．

$$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = 1(a_n - b_n) \\ a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n) \end{cases}$$

そーゆーことか!!

納得!!

> 例題 2　次の漸化式を解け．
>
> $$a_1 = 2,\ b_1 = 6,\ \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots① \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n & \cdots② \end{cases}$$
>
> (1) $\{a_n + b_n\}$，$\{3a_n - b_n\}$ の一般項を求めよ．
>
> (2) (1) の結果を用いて，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$t = \dfrac{2t+1}{3t+4}$ より，$3t^2 + 2t - 1 = 0$．

$\therefore\ t = -1,\ \dfrac{1}{3}$．

つまり式の組合せ方は 2 通りあって，公比 k は

$t = -1$ のとき，$k = 5$

$t = \dfrac{1}{3}$ のとき，$k = 1$

したがって，もとの連立漸化式は次のように変形できます．

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n) \\ a_{n+1} - \dfrac{1}{3}b_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{3}b_n \end{cases}$$

誘導では $\{3a_n - b_n\}$ となっていましたが，2 つ目の式の両辺 3 倍すれば同じことです．　たしかに…

このような理由で，誘導のような組合せが登場したのでした．

> 例題 3　次の漸化式を解け．
>
> $$a_1 = 2,\ b_1 = 1,\ \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n & \cdots① \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n & \cdots② \end{cases}$$
>
> (1) $\{a_n + b_n\}$ の一般項を求めよ．
>
> (2) (1) の結果を用いて，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$t = \dfrac{2t-1}{t+4}$ より，$t^2 + 2t + 1 = 0$．$(t+1)^2 = 1$ より $t = -1$(重解)．

つまり式の組合せ方は 1 通りしかなく，公比 k は $k = 3$．したがって，もとの連立漸化式は次のように変形できます．

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n)$$

このような理由で，1 通りの組合せ方しか誘導されておらず，代入法での 3 項間漸化式の特性方程式も重解になったわけです．

ヒミツがわかれば楽しいな．