Type ③　$a_{n+1}=pa_n+q$　$(p \neq 1,\ q \neq 0)$

p・q は n に無関係な単なる定数です。

漸化式 $a_{n+1}=a_n+q$ は等差数列，漸化式 $a_{n+1}=pa_n$ は等比数列を表していますが，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ $(p \neq 1,\ q \neq 0)$ で定まる数列は等差数列でも等比数列でもありません（だから，一般項の公式は使えない）．「じゃあ，どうすんねん」って話ですが，とりあえず具体的に書き出してその秘密を探ってみよう．一般的な法則は，具体的な考察の後に紹介します．

例題　次の漸化式を解け．　$a_1=3,\quad a_{n+1}=3a_n-4$

考え方　まずは漸化式 $a_{n+1}=3a_n-4$ から数列 $\{a_n\}$ を復元してみます．一見，何の規則性もないようですが，各項から 2 を引くと……

ようわからん数列やけど　　なぜか2を引くと　　等比数列になってしまう!!

3倍して4引く

$$
\begin{array}{lcl}
a_1 & = & 3 \\
a_2=3a_1-4=3\cdot 3-4 & = & 5 \\
a_3=3a_2-4=3\cdot 5-4 & = & 11 \\
a_4=3a_3-4=3\cdot 11-4 & = & 29 \\
a_5=3a_4-4=3\cdot 29-4 & = & 83 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
\xrightarrow{-2}
\begin{array}{lcl}
a_1-2=3-2 & = & 1 \\
a_2-2=5-2 & = & 3 \\
a_3-2=11-2 & = & 9 \\
a_4-2=29-2 & = & 27 \\
a_5-2=83-2 & = & 81 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
\quad \times 3
$$

初項 $a_1-2=1$
公比 3 の等比数列

ということは一般項がわかる → となればもとの数列の一般項もわかる!!

どういうわけだかわかりませんが，数列 $\{a_n\}$ の各項から 2 を引くと，初項 1，公比 3 の等比数列があらわれました．このことは，つまり，数列 $\{a_n\}$ の規則性はよくわからんけど，各項から 2 を引いた数列 $\{a_n-2\}$ が初項 $a_1-2=1$，公比 3 の等比数列になっていることを意味しています．

ふっしぎー　なんでー?

よって，数列 $\{a_n-2\}$ の一般項を求めると，

$$a_n-2=(a_1-2)\cdot 3^{n-1}=(3-2)\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$$

← 2引いた数列の一般項

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=3^{n-1}+2$$

← 2を足してもとの数列にもどしたわけです。

なんで2を引くのかサッパリわからんけどうまく求まってウレシイなあ

⇨注　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるのに，まずは各項から 2 を引いた数列 $\{a_n-2\}$ の一般項を求めました．数列 $\{a_n-2\}$ の一般項がわかれば，それに今度は逆に 2 を加えることで，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができます．

疑問　それにしても，なぜ各項から 2 を引いたのだろうか．なぜ −2 だけズラすと等比数列になったのだろうか．そもそも，この「−2」という数はどこから現れたのだろうか．

他の例でも考えてみよう．

神様のお告げ．そういうことにしとこ．

例 題 次の漸化式を解け．　$a_1=1,\quad a_{n+1}=-2a_n-3$

考え方 まずは漸化式 $a_{n+1}=-2a_n-3$ から数列 $\{a_n\}$ を復元してみます．一見，何の規則性もないようですが，各項に 1 を加えると ……

ようわからん数列やけど　　なぜか1をたすと　　等比数列になってしまう!!

$$
\begin{array}{lllcll}
 & a_1 & = & 1 & \xrightarrow{+1} & a_1+1=1+1 & = & 2 \\
-2倍して3引く & a_2=-2a_1-3=-2\cdot 1-3 & = & -5 & \xrightarrow{+1} & a_2+1=-5+1 & = & -4 \\
〃 & a_3=-2a_2-3=-2\cdot(-5)-3 & = & 7 & \xrightarrow{+1} & a_3+1=7+1 & = & 8 \\
〃 & a_4=-2a_3-3=-2\cdot 7-3 & = & -17 & \xrightarrow{+1} & a_4+1=-17+1 & = & -16 \\
〃 & a_5=-2a_4-3=-2\cdot(-17)-3 & = & 31 & \xrightarrow{+1} & a_5+1=31+1 & = & 32 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$\times(-2)$　$\times(-2)$　$\times(-2)$　$\times(-2)$

初項 $a_1+1=2$
公比 -2

どういうわけだかわかりませんが，数列 $\{a_n\}$ の各項に 1 を加えると，初項 2，公比 -2 の等比数列があらわれました．このことは，つまり，数列 $\{a_n\}$ の規則性はよくわからんけど，各項に 1 を加えた数列 $\{a_n+1\}$ が初項 $a_1+1=2$，公比 -2 の等比数列になっていることを意味しています．

よって，数列 $\{a_n+1\}$ の一般項を求めると，

$$a_n+1=(a_1+1)\cdot(-2)^{n-1}=(1+1)\cdot(-2)^{n-1}=2\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^n$$

← 1たした数列の一般項

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=-(-2)^n-1$$

← 1をひいてもとの数列にもどしたわけです

さっきは 2 引いたのに．なんで今度は 1をたしたんやろ？ サッパリわからん…

注 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるのに，まずは各項に 1 を加えた数列 $\{a_n+1\}$ の一般項を求めました．数列 $\{a_n+1\}$ の一般項がわかれば，それに今度は逆に 1 を引くことで，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができます．

神様に感謝

疑問 それにしても，なぜ各項に 1 を加えたのだろうか．なぜ $+1$ だけズラすと等比数列になったのだろうか．そもそも，この「$+1$」という数はどこから現れたのだろうか．

疑問は残りますが，この「ズラす数」が分かれば，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ を解くことができそうです．

たしかに　それが知りたい

これら 2 つの例から，次のことが予想されます．

▷Point◁

予想 漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の各項をテキトーにずらすと，必ず公比 p の等比数列になるのではないだろうか．

「漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ で定まる数列の各項をテキトーにずらせば必ず等比数列になる」というのはとても不思議な気がします．しかし，どれだけズラせばよいのか，つまり，この「ズラす数」がきちんと確定するならば，この予想は正しいことがわかります．

さあ，いよいよ，この「ズラす数」の秘密にせまろう．

知りたい

やったー．いよいよその秘密が明かされるのね!!