いま，数列 $\{a_n\}$ の各項から α を引いたときに，公比 p の等比数列になったと仮定しよう．このとき下のような状況になっています．

n番目 a_n と n+1番目 a_{n+1} の関係式

$$\boxed{a_{n+1}=pa_n+q}$$

p倍してみたす

$\cdots\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots$

$$\left\{\begin{array}{ccc}
a_1 & \xrightarrow{-\alpha} & a_1-\alpha \\
 & & \downarrow \times p \\
a_2 & \xrightarrow{-\alpha} & a_2-\alpha \\
 & & \downarrow \times p \\
a_3 & \xrightarrow{-\alpha} & a_3-\alpha \\
 & & \downarrow \times p \\
a_4 & \xrightarrow{-\alpha} & a_4-\alpha \\
\vdots & & \vdots \\
a_n & \xrightarrow{-\alpha} & a_n-\alpha \\
 & & \downarrow \times p \\
a_{n+1} & \xrightarrow{-\alpha} & a_{n+1}-\alpha
\end{array}\right\}$$

n番目 $a_n-\alpha$ と n+1番目 $a_{n+1}-\alpha$ の関係式

$$\boxed{a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)}$$

p倍する(だけ)

$\cdots\ a_n-\alpha,\ a_{n+1}-\alpha,\ \cdots$

つまり，

> 漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の各項から，α を引くと，公比 p の等比数列になる．

ということは，

> 漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ が，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形できる．

ということです．つまり，　2つの式が全く同じ式だということです。

わかってきたぞ

なるほど〜

$$a_{n+1}=pa_n+q \iff a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ を変形すると，

$$a_{n+1}-\alpha=pa_n-p\alpha$$
$$a_{n+1}=pa_n+\alpha-p\alpha$$

$a_{n+1}=pa_n+\alpha-p\alpha$

$a_{n+1}=pa_n+q$　一致する

なので，これが漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ と一致するためには，係数を比較して，

$$q=\alpha-p\alpha$$

とならねばなりません．つまり，

> 漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ が $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形できるとき，
> $q=\alpha-p\alpha$ をみたす α が存在する．

ということになります．

さて，最後に登場した関係式 $q=\alpha-p\alpha$ をもう少し変形すると，

$$q=\alpha-p\alpha \iff \underline{\alpha=p\alpha+q}$$

この式が最大のポイント

$\alpha=p\alpha+q$ を解けば α の値がわかります。これがズうす数の秘密ひす!!

となります．つまり，

> α を求めるための関係式 $\alpha=p\alpha+q$ は，もとの漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ において，a_{n+1} と a_n を共に α と置き換えた式に，偶然たまたま一致している．

ホンマやスゴっ

そーやったんか!!

なんと驚くべきことに，「ズラす数」α は，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ において a_{n+1} と a_n を共に α と置き換えた式 $\alpha=p\alpha+q$ を解けば求めることができるのです．何たる偶然，何たる奇跡．これが漸化式の真髄．

a_n と a_{n+1} は本来は全くちがうものなので、共に α とおいてはいけません。でも偶然たまたま $\alpha=p\alpha+q$ という式をそのようにみなせる．ということです。

フムフム

よって，以上の流れをまとめると，

▷Point◁(超重要)

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ で，a_n と a_{n+1} を共に α と置き換えた式 $\alpha=p\alpha+q$ から求められる数 α を用いれば，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ は，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形することができる．

このことはつまり，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の各項から α を引くと，公比 p の等比数列になることを意味している．

最初に紹介した 2 つの例の場合で確かめてみると，

例題 $a_1=3,\quad a_{n+1}=3a_n-4$

$a_{n+1}=3a_n-4$ で，a_n と a_{n+1} を共に α と置き換えた式 $\alpha=3\alpha-4$ より，$\alpha=2$．だから，数列の各項から -2 したのです．

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & 3 \\ a_2 & = & 5 \\ a_3 & = & 11 \\ a_4 & = & 29 \\ a_5 & = & 83 \\ & \vdots & \end{array} \xrightarrow{-2} \begin{array}{lcl} a_1-2 & = & 1 \\ a_2-2 & = & 3 \\ a_3-2 & = & 9 \\ a_4-2 & = & 27 \\ a_5-2 & = & 81 \\ & \vdots & \end{array}$$

確かに，$a_{n+1}=3a_n-4$ は，

$$a_{n+1}-2=3(a_n-2)$$

たしかに!!
ナットク～

と変形できています（展開して確認しておこう）．

このことは，数列 $\{a_n-2\}$ が初項 a_1-2，公比 3 の等比数列になっていることを意味しており，一般項の公式より，

$$\begin{aligned} a_n-2 &= (a_1-2)3^{n-1} \\ &= (3-2)3^{n-1} \\ &= 3^{n-1} \end{aligned}$$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=3^{n-1}+2$$

と求められたのです．

仕組みがわかったゾ

ヤッホーイ

例題 $a_1=1,\quad a_{n+1}=-2a_n-3$

$a_{n+1}=-2a_n-3$ で，a_n と a_{n+1} を共に α と置き換えた式 $\alpha=-2\alpha-3$ より，$\alpha=-1$．だから，数列の各項に $-(-1)=+1$ したのです．

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & 1 \\ a_2 & = & -5 \\ a_3 & = & 7 \\ a_4 & = & -17 \\ a_5 & = & 31 \\ & \vdots & \end{array} \xrightarrow{+1} \begin{array}{lcl} a_1+1 & = & 2 \\ a_2+1 & = & -4 \\ a_3+1 & = & 8 \\ a_4+1 & = & -16 \\ a_5+1 & = & 32 \\ & \vdots & \end{array}$$

確かに，$a_{n+1}=-2a_n-3$ は，

$$a_{n+1}+1=-2(a_n+1)$$

そーいうことやったんかー
ナルホド～

と変形できています（展開して確認しておこう）．

このことは，数列 $\{a_n+1\}$ が初項 a_1+1，公比 -2 の等比数列になっていることを意味しており，一般項の公式より，

$$\begin{aligned} a_n+1 &= (a_1+1)(-2)^{n-1} \\ &= (1+1)(-2)^{n-1} \\ &= 2\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^n \end{aligned}$$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=-(-2)^n-1$$

と求められたのです．

ナゾが解けた!!
神様のお告げじゃなかったよ．