「ズラす数」の仕組みがわかったところで，$\boxed{\text{Type ③}}$ の漸化式の解法の流れをまとめておこう．

ありがとう よろしく

▷Point◁(漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ の解法)

$\boxed{\text{Step ①}}$ $a_{n+1}=pa_n+q$ の a_{n+1} と a_n を共に α と置き換えた式 $\alpha=p\alpha+q$ をこっそりと解く．
（言うまでもなく，この α が数列 $\{a_n\}$ のズラし具合です．この計算は答案には出さない．）

答案のウラでこっそりやる秘密の計算です。

$\boxed{\text{Step ②}}$ ① で求めた α を用いて，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ を

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha) \quad \cdots\cdots(※)$$

この変形が最大のポイント

展開してもとの式と一致するか，必ず確認!!

の形に（いきなりに）変形する．

エッ いきなり？

$\boxed{\text{Step ③}}$ (※) の式を見て，数列 $\{a_n-\alpha\}$ が初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列になっていることを感じる．

はーい しみじみ感じまーす

$\boxed{\text{Step ④}}$ (※) の式より，$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$ となるので，

$$\therefore\ a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$$

おわり

わかりにくいときは これまでにやってきた具体例を思い出そうね

はーい

注 で $a_n-\alpha=b_n$ と置くと，$a_{n+1}-\alpha=b_{n+1}$ なので，(※) の式は $b_{n+1}=pb_n$ となります．こう表記すれば，数列 $\{b_n\}$ が初項 b_1，公比 p の等比数列であることがよくわかります．つまり，$b_n=b_1p^{n-1}$ なので，この式に，$b_n=a_n-\alpha$，$b_1=a_1-\alpha$ を代入すれば，$\boxed{\text{Step ④}}$ の式が得られます．

例題 次の漸化式を解け．　$a_1=2$，　$a_{n+1}=2a_n-1$

考え方 最初に秘密の計算をしておきます．$\alpha=2\alpha-1$ より $\alpha=1$．（この計算は答案には出さない）

ひみつの計算♡

解 漸化式より，$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$ ← いきなり変形した式をかく．

よって，数列 $\{a_n-1\}$ が初項 a_1-1，公比 2 の等比数列なので，

$$\begin{aligned}a_n-1&=(a_1-1)2^{n-1}\\&=(2-1)2^{n-1}\\&=2^{n-1}\end{aligned}$$

展開すると，もとの漸化式に一致するか必ず確認しよう ここでミスるとすべてがパー

ok

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=2^{n-1}+1$

$\boxed{\text{最後にもう一度だけ，仕組みを解説します}}$

$\alpha=1$ より，つまり数列の各項から -1 すれば等比数列になることがわかります．

$a_{n+1}=2a_n-1$ の世界

数列 $\{a_n\}$ は等差数列でも等比数列でもない!!

2倍して1ひく

a_1	$=$	2	$\xrightarrow{-1}$	a_1-1	$=$	1	$\times 2$
$a_2=2a_1-1$	$=$	3	$\xrightarrow{-1}$	a_2-1	$=$	2	$\times 2$
$a_3=2a_2-1$	$=$	5	$\xrightarrow{-1}$	a_3-1	$=$	4	$\times 2$
$a_4=2a_3-1$	$=$	9	$\xrightarrow{-1}$	a_4-1	$=$	8	$\times 2$
$a_5=2a_4-1$	$=$	17	$\xrightarrow{-1}$	a_5-1	$=$	16	

$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$ の世界

数列 $\{a_n-1\}$ が初項 a_1-1 の公比 2 等比数列になった!!

しょぼん… 規則わからん

でも ひみつの数をズラすと

ヤッホーイ 美しい関係

例 題 次の漸化式を解け.

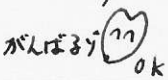
(1) $a_1=2,\ \ a_{n+1}=3a_n-2$　　(2) $a_1=1,\ \ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

(3) $a_1=1,\ \ a_{n+1}=9-2a_n$　　(4) $a_1=1,\ \ a_{n+1}=4a_n+3$

(5) $a_1=1,\ \ a_{n+1}=-2a_n+1$　　(6) $a_1=0,\ \ 2a_{n+1}-3a_n=1$

Let's Try!!

がんばるぞ



(1) ($\alpha=3\alpha-2$ より, $\alpha=1$)

漸化式より, $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

よって, 数列 $\{a_n-1\}$ は, 初項 a_1-1, 公比 3 の等比数列なので,

$$a_n-1=(a_1-1)3^{n-1}$$
$$=(2-1)3^{n-1}=3^{n-1}$$

$$\therefore\ \ a_n=3^{n-1}+1$$

ちょっと わかってきたよ

(2) ($\alpha=\frac{1}{3}\alpha+2$ より, $\alpha=3$)

漸化式より, $a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$

よって, 数列 $\{a_n-3\}$ は, 初項 a_1-3, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列なので,

$$a_n-3=(a_1-3)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=(1-3)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \ a_n=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$$

(3) ($\alpha=9-2\alpha$ より, $\alpha=3$)

$a_{n+1}=9-2a_n=-2a_n+9.$

漸化式より, $a_{n+1}-3=-2(a_n-3)$

よって, 数列 $\{a_n-3\}$ は, 初項 a_1-3, 公比 -2 の等比数列なので,

$$a_n-3=(a_1-3)(-2)^{n-1}$$
$$=(1-3)(-2)^{n-1}=(-2)^n$$

$$\therefore\ \ a_n=(-2)^n+3$$

(4) ($\alpha=4\alpha+3$ より, $\alpha=-1$)

漸化式より, $a_{n+1}+1=4(a_n+1)$

よって, 数列 $\{a_n+1\}$ は, 初項 a_1+1, 公比 4 の等比数列なので,

$$a_n+1=(a_1+1)4^{n-1}$$
$$=(1+1)4^{n-1}=2\cdot4^{n-1}$$

$$\therefore\ \ a_n=2\cdot4^{n-1}-1=2^{2n-1}-1$$

(5) ($\alpha=-2\alpha+1$ より, $\alpha=\frac{1}{3}$)

漸化式より, $a_{n+1}-\frac{1}{3}=-2\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$

よって, 数列 $\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$ は, 初項 $a_1-\frac{1}{3}$, 公比 -2 の等比数列なので,

$$a_n-\frac{1}{3}=\left(a_1-\frac{1}{3}\right)(-2)^{n-1}$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)(-2)^{n-1}=\frac{2}{3}(-2)^{n-1}$$

$$\therefore\ \ a_n=\frac{2}{3}(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}=-\frac{(-2)^n}{3}+\frac{1}{3}$$

(6) ($2\alpha-3\alpha=1$ より, $\alpha=-1$)

$2a_{n+1}-3a_n=1$ より, $a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+\frac{1}{2}.$

漸化式より, $a_{n+1}+1=\frac{3}{2}(a_n+1)$

よって, 数列 $\{a_n+1\}$ は, 初項 a_1+1, 公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列なので,

$$a_n+1=(a_1+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$
$$=(0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \ a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$$

だいぶ わかってきたよ

注 (3) と (6) では, まずは漸化式を $a_{n+1}=pa_n+q$ の形に変形していることに注意しよう. この形にしないと公比がわかりません.

とにかく, この 6 問は基本中の基本. 何度も何度も (最低 3 回！) 解いて解法を身体に完全に覚えこませること！！

はーい 何度も やりまーす!!