# 階差数列型漸化式の解法を学ぶ

カイサスーレツ…？
なんで漸化式と
関係あるん？

**Type ④**　$a_{n+1}=a_n+f(n)$　ただし $f(n)$ は $n$ の式

⇨注　くれぐれも，Type ①　$a_{n+1}=a_n+q$（$q$ は定数）型と間違わないこと．例えば，

$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2$ の場合，

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2=a_1+2=1+2 &= 3 \\
a_3=a_2+2=3+2 &= 5 \\
a_4=a_3+2=5+2 &= 7 \\
a_5=a_4+2=7+2 &= 9
\end{aligned}$$

+2　+2　+2　+2

差がすべて同じ
↓
つまり等差数列

⟶ 数列 $\{a_n\}$ は公差 2 の等差数列

よって，等差数列の公式より，

$a_n=a_1+(n-1)\times 2$

あたりまえ
OK

$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2n$ の場合，

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2=a_1+2=1+2 &= 3 \\
a_3=a_2+4=3+4 &= 7 \\
a_4=a_3+6=7+6 &= 13 \\
a_5=a_4+8=13+8 &= 21
\end{aligned}$$

+2　+4　+6　+8

ホンマヤ〜
さっきと
全然ちがうわ
的
ちょっとの
違いやのに…

⟶ 数列 $\{a_n\}$ は等差数列ではない．

よって，等差数列の公式は使えない．くれぐれも「公差 $2n$ の等差数列」などと妄想してはいけない．

では，$a_{n+1}=a_n+f(n)$ 型の漸化式はどのようにして解くのでしょうか．
実は，この型の漸化式の解き方はすでに学習済みです．なぜなら，

そうやったっけ…
知らんよ．

▷Point◁

$$a_{n+1}=a_n+f(n) \iff a_{n+1}-a_n=f(n)$$

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\cdots$
$f(1)\quad f(2)\quad f(3)$

この式は，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $f(n)$ であることを意味している．つまり，階差数列の手法を用いて，$a_n$ を求めることができる．

念のため，階差数列の考え方を復習しておこう．

数列 $\{a_n\}$ の階差数列とは，数列 $\{a_n\}$ の各項の差を順番に並べた数列のことで，初項 $a_1$ に差を足しあわせる（積み上げていく）ことで，一般項 $a_n$ を求めようとするものです．

$\{a_n\}$ : $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$

$\{b_n\}$ : $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots,\ b_{n-2},\ b_{n-1}$

$b_n=a_{n+1}-a_n$

つまり，$a_n$ は初項 $a_1$ に項の間隔（$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots,\ b_{n-2},\ b_{n-1}$）を足し合わせれば（積み上げれば）よいから，

$$a_n=\underbrace{a_1}_{\text{初項}}+\overbrace{(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-2}+b_{n-1})}^{n-1\text{コの間隔の和}}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\quad(n\geqq 2)$$

⇨注　$\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ の部分で，式として $n=1$ を代入することができないので，この式は $n\geqq 2$ で成立します．したがって，$n=1$ の場合は別に検証する必要があります．

$\sum_{k=1}^{0}b_k$ なんて変でしょ？

具体例でみていくことにしよう．

**例題** 次の漸化式を解け．

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n + 2n+1$$

nの式

わかってるよ

**考え方** くれぐれも"公差2n+1の等差数列"と思ってはいけませんよ!!

はーい

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \iff a_{n+1} - a_n = 2n+1$$

より，まずは，この式を見て「階差数列型だ」と気づくことがポイント．

気づけば，$2n+1$ が階差数列の一般項だから，階差数列の公式に当てはめればよいのです．.

**解** $a_{n+1} - a_n = 2n+1$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $2n+1$ なので，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) \\ &= 1 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + (n-1) \\ &= n^2 \quad \cdots\cdots① \end{aligned}$$

階差数列の公式です

①において $n=1$ とすると，$a_1 = 1^2 = 1$ となり，$a_1 = 1$ に一致する．

よって，① は $n \geqq 1$ で成立する．

この部分の確認を忘れないこと

$$\therefore\ \ a_n = n^2\ \ (n \geqq 1)$$

**注** 最初に求まった式は，あくまでも $n \geqq 2$ で成立する式なので，これが $n=1$ のときにどうなっているのかを，最後に検証します．結果的に $n=1$ のときも成立することがわかったので，「$n \geqq 1$」に補正して結論するのです．

**例題** 次の漸化式を解け．

(1) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n + 4^n$

(2) $a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n^2+n}$

**解**

(1) $a_{n+1} - a_n = 4^n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $4^n$ なので，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k \\ &= 1 + \frac{4^1(1-4^{n-1})}{1-4} \\ &= 1 + \frac{4^n - 4}{3} \\ &= \frac{4^n - 1}{3} \quad \cdots\cdots① \end{aligned}$$

初項 $4^1$，公比 4 項数 n−1 の等比数列の和

①において $n=1$ とすると，$a_1 = \dfrac{4^1-1}{3} = 1$ となり，$a_1 = 1$ に一致する．

よって，① は $n \geqq 1$ で成立する．

$$\therefore\ \ a_n = \frac{4^n - 1}{3}\ \ (n \geqq 1)$$

(2) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$ より，

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $\dfrac{1}{n^2+n}$ なので，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2+k} \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)} \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 3 - \frac{1}{n} \quad \cdots\cdots① \end{aligned}$$

部分分数に分けます。

①において $n=1$ とすると，$a_1 = 3 - \dfrac{1}{1} = 2$ となり，$a_1 = 2$ に一致する．

よって，① は $n \geqq 1$ で成立する．

この部分の確認を忘れないこと

$$\therefore\ \ a_n = 3 - \frac{1}{n}\ \ (n \geqq 1)$$

**注** 分数型の $\sum$ 計算は，部分分数に分けて縦書きするのでした．

$$\begin{array}{lcll} \boxed{\frac{1}{1}} & - & \cancel{\frac{1}{2}} & (k=1) \\ \cancel{\frac{1}{2}} & - & \cancel{\frac{1}{3}} & (k=2) \\ \cancel{\frac{1}{3}} & - & \cancel{\frac{1}{4}} & (k=3) \\ \vdots & & & \\ \cancel{\frac{1}{n-2}} & - & \cancel{\frac{1}{n-1}} & (k=n-2) \\ \cancel{\frac{1}{n-1}} & - & \boxed{\frac{1}{n}} & (k=n-1) \end{array}$$

ナナメが打ち消し合う様子がよくわかります

縦書きサイコー

基本的な漸化式の解き方は，これまでの $\boxed{\text{Type ①}}$ ～ $\boxed{\text{Type ④}}$ で終わりです．

ここから先の Type は，見た目は怪しいですが少し工夫すれば，$\boxed{\text{Type ①}}$ ～ $\boxed{\text{Type ④}}$ のいずれかの Type に変形できるものばかりです．したがって，「漸化式の解法」というよりも「おなじみの型に変形するための方法」を学んでいくことが目標となります．