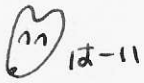
$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型漸化式の解法を学ぶ（Part Ⅰ）

まず始めに，これまでに学習した，基本となる 4 つの Type の漸化式を振り返ってみよう．



▷Point◁ 漸化式の基本 4Type

Type ①	$a_{n+1}=a_n+q$ （q は定数）	⟶ 公差 q の等差数列
Type ②	$a_{n+1}=pa_n$ （p は定数）	⟶ 公比 p の等差数列
Type ③	$a_{n+1}=pa_n+q$ （p，q は定数）	⟶ 内緒の計算して変形する．
Type ④	$a_{n+1}=a_n+f(n)$ （$f(n)$ は n の式）	⟶ 階差数列に持ち込む．

この4つは もう完ぺきです!!

これらの解法は完璧でしょうか？まずはこの 4Type を完璧にマスターしていないと，先に進めません．完璧にマスターしている人のみ，ここから先を読んでください．不安が残る人はもう一度最初からやり直し！（厳しいですけど）

今回，新たに学ぶ漸化式は次のような Type の漸化式です．

Type ⑤	$a_{n+1}=pa_n+f(n)$	⟶ $f(n)$ が n の指数関数

⇒注　なお，この Type の漸化式を考えるにあたり，定数 p は $p\neq 1$ とします．なぜなら，$p=1$ ならば，Type ④ と全く同じだからです．

いきなりですが，次の問題を考えてみよう．

例題　次の漸化式を解け．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+3^n$$

考え方　この Type の漸化式は，これまでのどの Type にも属していないことを確認しよう．「ということは，また新しい解き方を覚えるってこと？」と，ウンザリするかもしれませんが，この Type の漸化式は，うまく変形すれば必ずこれまでに学習した Type の漸化式になるので，いかにして，これまでの Type に帰着させるかが学習のポイントとなります．変形してこれまでの Type の漸化式になれば，あとはこれまでどおりの解法で解決します．

変形の方法を学ぶのね

では，どのようにしてこれまでの Type に帰着させるの．そのためには，末尾の 3^n の部分に注目して「この部分に n がなければ Type ③ になるのになあ・・・」と考えます．そして「どうやってこの部分の n を消去するのかな・・・」という意識のもと，次のような発想に行き着くのではないでしょうか．

解　漸化式の両辺を，両辺を 3^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2a_n}{3^{n+1}}+\frac{3^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$$

ここが ポイント!! $3^{n+1}=3\cdot 3^n$ と分ける!!

ここで，$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}$$

← Type ③ の漸化式

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ なので 必然的に $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=b_{n+1}$ となります。

$\dfrac{a_\bullet}{3^\bullet}$ をそろえる

よって，$b_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(b_n-1)$．

つまり，数列 $\{b_n-1\}$ は，初項 b_1-1，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列なので，

$$\begin{aligned}b_n-1&=(b_1-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\&=\left(\frac{a_1}{3^1}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\&=\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\&=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\&=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\end{aligned}$$

$b_1=\dfrac{a_1}{3^1}$ より b_1 を求めます

このへんは 楽勝〜

$$\therefore\ b_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n=1-\frac{2^n}{3^n}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より，$a_n=3^nb_n=3^n-2^n$

a_nにもどすのを忘れないように!! ■

⇨注　なぜ，両辺を 3^n ではなく，3^{n+1} で割ったのかわかりますか．別に 3^n で割っても構わないんですが，置き換えする際に，$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ というように，分子の添え字と分母の指数をそろえたほうが考えやすいし，なにより美しいからです．う～ん，美的感覚の問題なんですね．

もし 3^n で割った場合は，$\dfrac{a_n}{3^{n-1}}=b_n$ と置くことになります．バランス悪いし，計算ミスも起こりやすいので，あまりおススメしません．

⇨注　くれぐれも $\boxed{\text{Type ③}}$ と混同してはいけません．$\boxed{\text{Type ③}}$ と同じように，内緒の計算 $\alpha=2\alpha+3^n$ をして，$\alpha=-3^n$ とし，漸化式を

$$a_{n+1}+3^n=2(a_n+3^n)\ \cdots(※)$$

と変形する人がいます．変形自体は間違いではありませんが，この式から得られるものは何もありません．　ガ～ン!!

なぜなら，$a_n+3^n=b_n$ と置いたとき，a_n+3^n の n をそっくりそのまま全部 $n+1$ に入れ換えた式 $a_{n+1}+3^{n+1}$ だったら b_{n+1} となりますが，$a_{n+1}+3^n$ は b_{n+1} でも何でもありません．つまり，漸化式 (※) は「($n+1$ 番目) $=2\times$ (n 番目)」という等比数列の関係を表しているわけではないのです．ですから，これは単なる関係式に過ぎず，この漸化式から何の性質も浮かび上がってきません．

意味なしか

また，次のような別解もあります．

別解　両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2a_n}{2^{n+1}}+\frac{3^n}{2^{n+1}}$$
$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

両辺を割るのをちょっと変えるだけでまた別のTypeになるのね…

ふ～ん

よって，$\dfrac{a_n}{2^n}=c_n$ とおくと，

$$c_{n+1}=c_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \longleftarrow \boxed{\text{Type ④}}\text{の漸化式}$$

よって，$c_{n+1}-c_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ より，数列 $\{c_n\}$ の階差数列の一般項が $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ なので，

$n\geqq 2$ のとき，　$a_n=c_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k$

$$=\frac{a_1}{2^1}+\frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{3}{2}}$$

う～ん ちょっとメンドクサイな…

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^n-\frac{3}{2}$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\quad\cdots\cdots①$$

① において $n=1$ とすると，$c_1=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$ となり，$c_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$ に一致する．よって，① は $n\geqq 1$ で成立する．

$$\therefore\ c_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1=\frac{3^n}{2^n}-1\ (n\geqq 1)$$

$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より，$a_n=2^nc_n=3^n-2^n$

■

⇨注　今度は a_n の係数の累乗で割ってみました．うまく $\boxed{\text{Type ④}}$ に帰着できましたが，ややメンドウです．センター試験などで出題者が解法を指定してこない限り，最初の解法を優先させるべきでしょう．

やっぱりな～ ぼくも最初の方がエエと思うよ。

まとめると，$a_{n+1}=pa_n+$ (n の指数関数) 型漸化式の解法は次のようになります．

▷Point◁

$a_{n+1}=pa_n+q^n$ の解法 ⟶ 両辺を q^{n+1} で割る

⟹ $\dfrac{a_n}{q^n}=b_n$ とおくことで $\boxed{\text{Type ③}}$ に帰着できる．

なお，両辺を p^{n+1} で割って，$\dfrac{a_n}{p^n}=c_n$ とおくことで $\boxed{\text{Type ④}}$ に帰着することもできる．

⇨注 $a_{n+1}=pa_n+c\cdot q^n$ や $a_{n+1}=pa_n+q^{n+1}$，$a_{n+1}=pa_n+q^{n-1}$ などの場合も，q^{n+1} で割ります．