$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型漸化式の解法を学ぶ (Part Ⅱ)

さて，今回，新たに学ぶ漸化式は次のような Type の漸化式です．

Type ⑥	$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ ⟶ $f(n)$ が n の整関数

整関数とは n の 1 次関数や 2 次関数のことです ($2n+1$ とか n^2 など)．指数関数型に比べれば，一見，単純でシンプルそうですが，実はこの Type の漸化式が一番メンドウでややこしく，また入試でも最もよく出題される Type なのです．　ふ〜ん．そりゃ大変やな

出題される場合は，たいてい誘導があるので (最近はそうでもないけど・・・)，その誘導に従えば解けるようになっています．だから一般的な解法を暗記する必要は全くありません．しかし，ある程度，背景を知っておいた方が，誘導に上手に乗っかれると思うので，解説したいと思います．　うん

この型の漸化式も，前回紹介した指数関数型と同じく，うまく変形すればこれまでに学習した Type の漸化式になるので，いかにして，これまでの Type に帰着させるかが学習のポイントとなります．

そこで，もう一度，これまでに学習した，基本となる 4 つの Type の漸化式を振り返ってみよう．

▷Point◁ 漸化式の基本 4Type

Type ①	$a_{n+1}=a_n+q$ (q は定数)	⟶ 公差 q の等差数列
Type ②	$a_{n+1}=pa_n$ (p は定数)	⟶ 公比 p の等差数列
Type ③	$a_{n+1}=pa_n+q$ (p, q は定数)	⟶ 内緒の計算して変形する．
Type ④	$a_{n+1}=a_n+f(n)$ ($f(n)$ は n の式)	⟶ 階差数列に持ち込む．

この4タイプは完ぺきでーす

まずはこの 4Type を完璧にマスターしていないと，先に進めません．完璧にマスターしている人のみ，ここから先を読んでください．不安が残る人はもう一度最初からやり直し！(厳しいですけど)　もう大丈夫!!

⇨注　なお，$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型の漸化式を考えるにあたり，定数 p は $p \neq 1$ とします．なぜなら，$p=1$ ならば，Type ④ と全く同じだからです．

1　$f(n)$ が 1 次関数の場合

早速，具体例で検証することにしよう．概ね 2 通りの解法があります．
例えば，次のような意味ありげな誘導が付いた問題があります．　フムフム

例題 1　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-2n+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，

(1) $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおいて，数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ．
(2) (1) を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

考え方　これらの置き換えが何を意味するのかわかりませんが，とりあえずやってみます．数列 $\{b_n\}$ の漸化式とは，b_n と b_{n+1} の関係式のことです．ということは，$a_{n+1}-a_n$ と $a_{n+2}-a_{n+1}$ の関係を考えることになるので，必然的に a_{n+2} を登場させねばなりません．では，どうやって $a_{n+2}-a_{n+1}$ のなどの引き算の形を作り出すのでしょうか？　どーするのー？

解

漸化式 $a_{n+1}=2a_n-2n+1$ において，n を $n+1$ に置き換えた式 $a_{n+2}=2a_{n+1}-2(n+1)+1$ を考えて，辺々を引くと，

こうすれば エエんや

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_{n+2} & = & 2a_{n+1} & - & 2(n+1) & & +1 \\ a_{n+1} & = & 2a_n & - & 2n & & +1 \\ \hline \end{array}$$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-2 \quad \cdots\cdots(※)$$

ナルホドー

ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，（※）式は

$$b_{n+1}=2b_n-2 \quad (\longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}\text{の漸化式})$$

よって，$b_{n+1}-2=2(b_n-2)$ より，数列 $\{b_n-2\}$ は，初項 b_1-2，公比 2 の等比数列なので，

$$\begin{aligned} b_n-2 &= (b_1-2)2^{n-1} \\ &= (1-2)2^{n-1} \\ &= -2^{n-1} \end{aligned}$$

このへんは OK

（$a_1=2$ より $a_2=2a_1-2+1=3$. ← a_2は自分で求めます
よって $b_1=a_2-a_1=3-2=1$）

$$\therefore \quad b_n=-2^{n-1}+2$$

$$a_{n+1}-a_n=-2^{n-1}+2$$

$$(\longleftarrow \boxed{\text{Type ④}}\text{ の漸化式})$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $-2^{n-1}-2$ なので，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2^{k-1}+2) \\ &= 2-\frac{2^0(1-2^{n-1})}{1-2}+2(n-1) \\ &= 2-(2^{n-1}-1)+2n-2 \\ &= -2^{n-1}+2n+1 \quad \cdots\cdots① \end{aligned}$$

階差数列よく登場するなあ

大切ってことやな

①において $n=1$ とすると，$a_1=-2^0+2+1=2$ となり，$a_1=2$ に一致する．

よって，① は $n\geqq 1$ で成立する．

$$\therefore \quad a_n=-2^{n-1}+2n+1 \quad (n\geqq 1)$$

■

注 階差の式と元の漸化式を連立して

$$\begin{cases} a_{n+1}-a_n=-2^{n-1}+2 \\ a_{n+1}=2a_n-2n+1 \end{cases}$$

より，a_{n+1} を消去し a_n を求めても構いません．つまり，

$$2a_n-2n+1-a_n=-2^{n-1}+2$$

$$\therefore \quad a_n=-2^{n-1}+2n+1$$

こっちの方がカンタンやーん

こっちでやろうよ

この方が圧倒的に簡単ですね．

注 漸化式 $a_{n+1}=2a_n-2n+1$ で，n を $n+1$ に 1 レベル上げて辺々を引き，$a_{n+1}-a_n=b_n$ と置き換えすると，$b_{n+1}=2b_n-2$ という漸化式になりました．つまり，漸化式 $a_{n+1}=2a_n-2n+1$ の $-2n+1$ 部分から n を消去したとも考えられます．

前回の指数関数型では，例えば $a_{n+1}=2a_n+3^n$ の場合，両辺を 3^{n+1} で割ることで，3^n の n を消去したのでした．つまり，$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型漸化式では，$f(n)$ 部分の n をいかにして消去するのか，が最大のポイントだったわけです．

$f(n)$ が n の 1 次関数の場合，n を $n+1$ に 1 レベル上げて辺々を引くことで，$f(n)$ の n が消去できるのです．

なるほどー 1次関数やからね．

それでは同じ問題を別の方法で解いてみよう．

例題 2　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-2n+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，

(1) $b_n=a_n+\alpha n+\beta$ とおいて，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるように定数 α，β の値を求めよ．
(2) (1) を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

考え方　これらの置き換えが何を意味するのかわかりませんが，とりあえずやってみます．$\{b_n\}$ が等比数列になるようにせよ，ということなので，$b_{n+1}=pb_n$ の形になることを示せばよいので，始めからこの形になることを想定して解いていきます．