解

$b_n=a_n+\alpha n+\beta$ より，$a_n=b_n-\alpha n-\beta$.

また，$a_{n+1}=b_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta$ なので，漸化式に代入すると，

$$b_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta=2(b_n-\alpha n-\beta)-2n+1$$

$$b_{n+1}=2b_n-(\alpha+2)n+\alpha-\beta+1$$

よって，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるための条件は，

$$\alpha+2=0 \text{ かつ } \alpha-\beta+1=0$$

したがって，$\alpha=-2$，$\beta=-1$

(2) (1) より，$b_n=a_n-2n-1$ とおけば，

$$b_{n+1}=2b_n \quad (\longleftarrow \boxed{\text{Type ②}}\text{の漸化式})$$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 b_1，公比 2 の等比数列なので，

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 2^{n-1} \\ &= (a_1-2\cdot 1-1)2^{n-1} \\ &= -2^{n-1} \end{aligned}$$

前半で苦労したけど
後半はカンタ〜ン

したがって，$a_n-2n-1=-2^{n-1}$.

$$\therefore\ a_n=-2^{n-1}+2n+1$$

さっきと比べると
明らかにこっちの方がラク…

■

前半部分がやや難しいですが，いったん変形が完成すると，後はとてもスムーズです．全体的には $\boxed{\text{例題}}$ 1 に比べてかなり簡単に解けたと思います．

しかしながら，この $\boxed{\text{例題}}$ 2 で気になるのは最初の部分です．なぜ，$b_n=a_n+\alpha n+\beta$ と置き換えしようと考えたのでしょうか？

その秘密を探ってみよう．

なんで〜？
おしえて〜

参考 $\boxed{\text{例題 2 の変形の秘密}}$

例えば，基本である $\boxed{\text{Type ③}}$ の漸化式

$$a_{n+1}=2a_n-2$$

をそもそもどのように解いたのか思い出してみよう．それは，

そーやったわ

$$a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$$

うん

という形に変形できた，と想定して考えたのでした．

この式を展開すると

$$a_{n+1}=2a_n-\alpha$$

となり，$a_{n+1}=2a_n-2$ と係数比較して，$\alpha=2$.

したがって，

$$a_{n+1}-2=2(a_n-2)$$

たしかに
思い出してきたよ
フムフム

となったのでした．一般に，

$$a_{n+1}=pa_n+q$$

の場合に同様の作業をすると，内緒の計算式 ($\alpha=p\alpha+q$) が導かれ，この方程式を解いて α を求めて変形したのでした．

$a_{n+1}=2a_n-2n+1$ の場合も全く同じように考えるのです．つまり，

$$a_{n+1}+\boxed{\quad ア \quad}=2\left\{a_n+\boxed{\quad イ \quad}\right\} \quad \cdots\cdots(※)$$

ふ〜ん
同じような
感じね

という形に変形できた，と想定するのです．

さて，$\boxed{\quad ア \quad}$，$\boxed{\quad イ \quad}$ にはどんなモノが入るでしょうか．まず，「定数」が入ることはありません．なぜなら展開したときに $a_{n+1}=2a_n-2n+1$ にならないといけないのに，「定数」だと $-2n+1$ が出てこないからです．よって，$\boxed{\quad ア \quad}$，$\boxed{\quad イ \quad}$ には n の式が入るはず．では，どんな n の式なのか．展開したときに n の 1 次式 $-2n+1$ になるんだから，2 次式や 3 次式ではちょっとダメでしょう．結局，「n の 1 次式」が入るはずです．

そりゃそうやわ

よって，とりあえず，$\boxed{\quad イ \quad}=\alpha n+\beta$ としてみましょう．

$$a_{n+1}+\boxed{\quad ア \quad}=2\left\{a_n+\boxed{\alpha n+\beta}\right\}$$

このとき，$\boxed{\quad ア \quad}$ にはどんな式が入るでしょうか．もし $a_n+\alpha n+\beta=b_n$ と置いたときに，

$a_{n+1}+\boxed{\quad ア \quad}=b_{n+1}$ とおけたらムチャクチャ都合が良いです．なぜなら，

$$b_{n+1}=2b_n$$

これは，まさに
理想的な形!!

というチョ〜シンプルな漸化式にたどり着くからです．そのためには，$\boxed{\quad ア \quad}$ には $\alpha n+\beta$ の n を $n+1$ に換えた式 $\alpha(n+1)+\beta$ が入ればよいのです．よって，

"こうなればうまくいく"ということです。

最終的に $a_{n+1}=2a_n-2n+1$ が

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$$

という理想的な形に変形できれば，$a_n+pn+q=b_n$ と置いたときに，$b_{n+1}=2b_n$ となるので，b_n は求められる．b_n がわかれば a_n もわかる．

これが，例題 2 の変形の背景です．このような理想的な変形が可能かどうかは，α，β がきちんと確定するかどうかにかかっており，例題 2 の (1) は，実際に α，β を求めることからスタートしているのです．(1) の問題文をもう一度よく読むと「$b_n=a_n+\alpha n+\beta$ とおいて，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるように定数 α，β の値を求めよ．」とあります．つまり，等比数列という理想的な形になるようにするためには，α，β をどのように定めればよいか，と聞いているのです．

その理想的な形が

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$$

というわけです．つまり，$a_{n+1}=2a_n-2n+1$ がこのような形に変形できるのだから，係数比較して α，β を求めたのです．

この考え方はなかなか難しく，簡単には理解できないかもしれませんが，実際の入試問題では，この思考過程がよく出題されるんですね (とくにセンター試験で)．時間がかかっても良いので，じっくり考えてマスターしてほしい考え方です．

じっくり考えまーす　はーい

これまでの手法をまとめておこう．

そもそも今回の漸化式 $a_{n+1}=2a_n-2n+1$ を解くにあたっての最大の関門は「末尾の $-2n+1$ の n をどうやって消去するのか」ということでした．そこで，次のような 2 通りの方法で $-2n+1$ の n を消去します．

▷Point◁(漸化式 $a_{n+1}=pa_n+$ (n の整関数) の解法)

解法 ①　n のレベルを 1 コあげて辺々を引き，階差数列に持ち込む．　⟶　真面目にコツコツ型．

解法 ②　理想的な形に変形できたと仮定 (予想) して一気にやる．　⟶　理想追求型．

君はどっちのタイプ？

解法 ① は分かりやすいが計算がメンドウ，解法 ② は考え方がややこしいがストレートにできる，どちらも一長一短ですね．できれば両方の解法をマスターしてほしいところ．

でも，たいていの場合は誘導が付いており，その誘導に従えば解けるようになっています．ノーヒントで出題されることはほとんどありません．

しかしながら，その誘導が何を意味するのか，その背景が分かっていないと，自分が何をやろうとしているのかが見えず，いまひとつピンと来ないでしょう．

これらの誘導を見たときに，「ああ，あの解法でやろうとしてるんだな」という意識を持つことが重要です．式の意味や解法の背景を全く知らずに解くのと，ある程度，意味を理解した上で解くのとでは，ずいぶん違うと思いますよ．

たしかにそうや

それでは次の問題をノーヒントで 2 通りの方法で解いてみよう．

例題　次の漸化式を解け．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+4n$$

解 1　真面目にコツコツ型

漸化式 $a_{n+1}=3a_n+4n$ において，n を $n+1$ に置き換えた式 $a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1)$ を考えて，辺々を引くと，

$$\begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & 3a_{n+1}+4(n+1) \\ a_{n+1} & = & 3a_n+4n \\ \hline \end{array}$$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4 \quad \cdots\cdots(※)$$

n が消えた!!