ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，(※) 式は

$$b_{n+1}=3b_n+4 \quad (\longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}\text{の漸化式})$$

よって，$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$ より，数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 b_1+2，公比 3 の等比数列なので，

$$\begin{aligned} b_n+2&=(b_1+2)3^{n-1}\\ &=(6+2)3^{n-1}\\ &=8\cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

a_2は自分で求めます

($a_1=1$ より $a_2=3a_1+4=7$.
よって $b_1=a_2-a_1=7-1=6$)

$$\therefore\quad b_n=8\cdot 3^{n-1}-2$$

$$a_{n+1}-a_n=8\cdot 3^{n-1}-2$$

$$(\quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ④}}\text{ の漸化式})$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $8\cdot 3^{n-1}-2$ なので，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot 3^{k-1}-2)\\ &=1+8\frac{3^0(1-3^{n-1})}{1-3}-2(n-1)\\ &=4\cdot 3^{n-1}-2n-1 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

① において $n=1$ とすると，$a_1=4\cdot 3^0-2-1=1$ となり，$a_1=1$ に一致する．

よって，① は $n\geqq 1$ で成立する．

$$\therefore\quad a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1 \quad (n\geqq 1)$$

■

⇨注　階差の式と元の漸化式を連立して

$$\begin{cases} a_{n+1}-a_n=8\cdot 3^{n-1}-2\\ a_{n+1}=3a_n+4n \end{cases}$$

より，a_{n+1} を消去し a_n を求めても構いません．つまり，

$$3a_n+4n-a_n=8\cdot 3^{n-1}-2$$

$$2a_n=8\cdot 3^{n-1}-4n-2$$

$$\therefore\quad a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$$

解 2　理想追求型

$a_{n+1}=3a_n+4n$ が

nの1次式

$$a_{n+1}+p(n+1)+q=3(a_n+pn+q)$$

nをn+1に入れかえた

という形に変形できたとする．このとき，

$$a_{n+1}+pn+p+q=3a_n+3pn+3q$$

$$\therefore\ a_{n+1}=3a_n+2pn+2q-p$$

よって，これが $a_{n+1}=3a_n+4n$ と一致しないといけないので，

$$2pn+2q-p=4n$$

つまり，この式が任意の n で成立せねばならないので，n についての恒等式と考えて係数を比較して

$$2p=4,\quad 2q-p=0$$

$$\therefore\ p=2,\ q=1$$

したがって，$a_{n+1}=3a_n+4n$ は

念のため展開して一致するか確認しとこう

$$a_{n+1}+2(n+1)+1=3(a_n+2n+1)$$

という形に変形できる．

ここで，$b_n=a_n+2n+1$ とおけば，

$$b_{n+1}=3b_n \quad (\longleftarrow \boxed{\text{Type ②}}\text{の漸化式})$$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 b_1，公比 3 の等比数列なので，

$$\begin{aligned} b_n&=b_1 3^{n-1}\\ &=(a_1+2\cdot 1+1)3^{n-1}\\ &=4\cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

したがって，

$$a_n+2n+1=4\cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$$

やっぱり理想追求型の方がいい感じがする〜

■

2　$f(n)$ が 2 次関数の場合

入試で登場するのは，$f(n)$ が 1 次関数の場合がほとんどです．なぜかというと，2 次関数以上の場合も考え方は全く同じで，計算がただメンドウなだけで，あんまり数学的に意味がないからです．

でも，せっかくなので少しだけ紹介しておこう．

べつにエエよ…

例題　次の漸化式を解け．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+n^2$$

考え方　$f(n)$ が n の 2 次式です．先ほどと同じく 2 通りの方法でできますが・・・この問題は，

解法② の「理想追求型」がベストだと思います．やってみましょう．

解 漸化式 $a_{n+1}=2a_n+n^2$ が次のような形に変形できたとする．

nの2次式

$$a_{n+1}+p(n+1)^2+q(n+1)+r=2(a_n+pn^2+qn+r)\quad\cdots(※)$$

nをn+1に入れかえる

このとき展開して整理すると，

$$a_{n+1}=2a_n+pn^2+(q-2p)n+r-p-q$$

これが，$a_{n+1}=2a_n+n^2$ に一致するので係数を比較して

$p=1,\quad q-2p=0,\quad r-p-q=0$

よって，$p=1,\ q=2,\ r=3.$

つまり，$a_{n+1}=2a_n+n^2$ は

$$a_{n+1}+(n+1)^2+2(n+1)+3=2(a_n+n^2+2n+3)$$

という形に変形できる．このことは，

数列 $\{a_n+n^2+2n+3\}$ が，初項 $a_1+1^2+2\cdot1+3$，公比 2 の等比数列であることを意味している．よって，

$$a_n+n^2+2n+3=(a_1+1^2+2\cdot1+3)2^{n-1}=7\cdot2^{n-1}$$

確かに早くできる…

$$\therefore\ a_n=7\cdot2^{n-1}-n^2-2n-3$$

■

⇨注 n の 2 次式だから，理想的な形が (※) のようになるのは何となく検討がつくでしょう．

⇨注 もしも，解法① の「真面目でコツコツ型」でやってみるとどうなるのでしょうか．怖いもの見たさで，ちょっくらやってみます．

解

漸化式 $a_{n+1}=2a_n+n^2$ において，n を $n+1$ に置き換えた式 $a_{n+2}=2a_{n+1}+(n+1)^2$ を考えて，辺々を引くと，

$$\begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & 2a_{n+1}+(n+1)^2 \\ a_{n+1} & = & 2a_n+n^2 \\ \hline a_{n+2}-a_{n+1} & = & 2(a_{n+1}-a_n)+2n+1 \end{array}\quad\cdots\cdots①$$

1次式

2次式 → 1次式 → 定数 と次数がいずつ下がってます。

ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，① 式は，

$$b_{n+1}=2b_n+2n+1$$

同様にして，

$$\begin{array}{rcl} b_{n+2} & = & 2b_{n+1}+2(n+1)+1 \\ b_{n+1} & = & 2b_n+2n+1 \\ \hline b_{n+2}-b_{n+1} & = & 2(b_{n+1}-b_n)+2 \end{array}\quad\cdots\cdots②$$

定数

だから2回やるんだね

キツイ…

ここで，$b_{n+1}-b_n=c_n$ とおくと，② 式は，

$$c_{n+1}=2c_n+2\quad(\longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}\text{の漸化式})$$

…

(以下，略)

n を $n+1$ に上げて引く，という操作を 2 回行うことで，やっとこさ定番の漸化式 Type ③ に到達しました．

あとは，この漸化式 c_n を求め，次に，$b_{n+1}-b_n=c_n$ なので階差数列の公式より b_n を求め，最後に，$a_{n+1}-a_n=b_n$ からもう一度，階差数列の公式を用いて a_n を求めることになります．流れは単純ですが，考えただけで気が遠くなるような計算の手間です．

うーん

大変や…

例えば，c_1 を求めるにはどうすれば良いのでしょう．

$c_1=b_2-b_1$ なので，b_1 と b_2 が必要です．

$b_1=a_2-a_1$，$b_2=a_3-a_2$ なので，結局，c_1 を求めるには a_1，a_2，a_3 の値が全て必要になってくるのです．

これだけ考えただけでも，手間が多くてあまり実戦的な手法ではありませんね

ちなみに，c_1 は・・・

$a_1=1$ より

$a_2=2a_1+1=3.\ \ a_3=2a_2+4=10.$

よって，$b_1=a_2-a_1=3-1=2,$

$b_2=a_3-a_2=10-3=7.$

したがって，$c_1=b_2-b_1=7-2=5.$

確かにイヤになりますね．絶対に計算ミスしそうです．

c_1を出すのにこんなけも計算せなあかんの…

あきらめた…

最後に一言

なかなか理解しにくい内容だったと思います．漸化式の中でも最もムツカシイかもしれません．「そうすれば，なぜうまくいくのか」をしっかりと理解してください．

最初にも言いましたが，この Type の漸化式は大学入試でもっとも出題される漸化式なのです．しかし必ず誘導があるので，おそれる必要はありません．誘導に従えば解けるようになっています．大切なことは，その誘導を見たときに「ああ，あの方法でやってるのね」と意識できるかどうか，です．焦らず，頑張ってください．

ここが最大のヤマ場

はーい