分数型漸化式の解法を学ぶ（Part Ⅰ）

今度は分数か…
ホンマにイロイロな型があるねえ
トホホ…

分数型漸化式とは，一般的に，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ という形の漸化式をいいます．「どんなに複雑な漸化式でも，うまく置き換えや変形をすれば，おなじみの漸化式の形になる」というこれまでの考え方は，この分数型漸化式においても同様です．

分数型漸化式は大きく分けて次の 2 つの Type に分かれます．

$$\begin{cases} q=0 \text{ のとき} \quad a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{ra_n+s} & \cdots\cdots \boxed{\text{Type ⑦}} \\ q\neq 0 \text{ のとき} \quad a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s} & \cdots\cdots \boxed{\text{Type ⑧}} \end{cases}$$

ノーヒントで出題されるとすれば $\boxed{\text{Type ⑦}}$ です（たまに誘導がある場合もある）．

$\boxed{\text{Type ⑧}}$ は必ず誘導付きで出題されます．

ホッ　よかったー．ちゃんと安心したー

参考 分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ を考えるときは，$ps-qr\neq 0$，$r\neq 0$ という条件が暗黙の了解としてあります．なぜだかわかりますか．

例えば，$ps-qr=0$ となる p，q，r，s として，$p=2$，$q=6$，$r=1$，$s=3$ としてみましょう．このとき，

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}=\frac{2a_n+6}{a_n+3}=\frac{2(a_n+3)}{a_n+3}=2$$

アレッ？
a_nが なくなったゾ…

となり，数列 $\{a_n\}$ が一定の値をとる定数列になってしまうからです．こうなってしまっては面白くないので，$ps-qr\neq 0$ という条件が暗黙の了解として付加されるのです．

ふへん

$$\boxed{\text{Type ⑦}} \qquad a_{n+1}=\frac{pa_n}{ra_n+s}$$

例題 次の漸化式を解け．

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$$

考え方 このままではどうすることできません．分数において分母が和の形になっている場合は変形の仕様がないからです．

$$\frac{z}{x+y}\neq\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$$

しかし，分子が和の形になっている場合は変形可能です．

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$$

この（一見当たり前のように思える）感覚が，分数型漸化式の解法の前提になります．

解

漸化式より $a_n\neq 0$ なので，両辺の逆数をとると，　…(※)

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=2+\frac{3}{a_n}$$

実にうまい置き換えやな

ここで，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ と置くと，

スゲー

$$b_{n+1}=3b_n+2 \quad (\longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}\text{の漸化式})$$

よって，$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$ より，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 b_1+1，公比 3 の等比数列なので，

$$b_n+1=(b_1+1)3^{n-1}=(2+1)3^{n-1}=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

$$\left(b_1=\frac{1}{a_1}=2\right)$$

このへんの計算は楽勝

$$\therefore\quad b_n=3^n-1$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3^n-1}$

したがって，次のように解法をまとめることができます．

▷Point◁

$a_{n+1} = \dfrac{pa_n}{ra_n + s}$ 型漸化式の解法

⟶ (数列の各項が 0 にならないことを確認した上で) 漸化式の両辺の逆数をとり，$\dfrac{1}{a_n} = b_n$ と置き換えると．$\boxed{\text{Type ③}}$ の漸化式に帰着される．

注 (※) 部について，少し疑問に思うかもしれません．「この一言だけでエエのか」と．確かに，全ての n に対して $a_n \neq 0$ であることをきちんと示すには，数学的帰納法を用いて証明する必要あります．しかし，これは漸化式を解く問題なので数学的帰納法にはあまり立ち入らずに「漸化式より $a_n \neq 0$ なので」とサラッと流したわけです．

時間がなければこれでも構いませんが，時間の余裕があるなら，きちんと証明した方が良いでしょう．

はーい

数学的帰納法による (※) 部の証明

そんなに難しい帰納法じゃないですねえ

まず，「すべての n に対して $a_n > 0$」を示す．

(i) $n = 1$ のとき，$a_1 = \dfrac{1}{2} > 0$ より成立．

(ii) $n = k$ のとき成立すると仮定すると，$a_k > 0$ より，$a_{k+1} = \dfrac{a_k}{2a_k + 3} > 0$．よって，$n = k + 1$ のときも成立する．

(i)(ii) より，すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ である．

よって，$a_n \neq 0$．

しかしながら，この証明をみると，またまた疑問に思うかもしれません．「$a_n \neq 0$ を示すのが目的なのに，なぜ $a_n > 0$ を示しているのだろうか．最初から $a_n \neq 0$ を数学的帰納法で証明すれば良いのではないか」と．

確かに，この疑問はもっともですが，これにはビミョ〜な問題を含んでいます．なにがビミョ〜なのか気になる人は，下の **参考** をお読みください．別に気にならない人はこのままスルーしてください．

ちょっと気になる〜

参考 一般に分数型の漸化式は「分母 $= 0$」になった時点でストップしてしまいます．今回の場合は，最終的な a_n の式，$a_n = \dfrac{1}{3^n - 1}$ を見ればわかるように，そんなことは起こりません (なぜならば，$n \geqq 1$ のとき $3^n > 1$ なので $3^n - 1 \neq 0$ だから)．

しかし初項の定め方によっては「分母 $= 0$」になってしまうことがあります．

例えば，漸化式はそのままで $a_1 = -\dfrac{9}{8}$ としましょう．このとき，a_2 や a_3 はどうなるでしょうか．

$$a_1 = -\frac{9}{8}$$

$a_1 \neq 0$ → $a_2 \neq 0$ → a_3 ×存在せず

$$a_2 = \frac{a_1}{2a_1 + 3} = \frac{-\frac{9}{8}}{2\left(-\frac{9}{8}\right) + 3} = -\frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2a_2 + 3} = \frac{-\frac{3}{2}}{2\left(-\frac{3}{2}\right) + 3} = \frac{-\frac{3}{2}}{0} \quad ??$$

アレ〜?

となり，a_3 は定義されません．a_3 は存在すらしないので，$a_3 > 0$ とか $a_3 \neq 0$ とかの議論は全くナンセンス．つまり，$a_n \neq 0$ だからといって，$a_{n+1} \neq 0$ だとは限らないのです．

したがって，$a_n \neq 0$ を数学的帰納法で証明することはできません．「$a_k \neq 0 \implies a_{k+1} \neq 0$」という議論が成り立たないからです．

そこで，今回の場合，「分母 $= 0$」になるのは $a_n = -\dfrac{3}{2}$ のときだから，いっそのこと「$a_n > 0$」であることを証明してしまえば，そのようなやっかいなことも回避できるし一石二鳥というわけなのです．だから，$a_n \neq 0$ ではなく，$a_n > 0$ を示したのです．

ふーん

いろんな事情があるのね…