分数型漸化式の解法を学ぶ（Part Ⅱ）

それでは，一般的な分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の解法について学ぼう．

最初に言っておきますが，このタイプの漸化式が出題される時は，必ず誘導があるので，その誘導に従えば解けるようになっています．だから，一般的な解法を暗記する必要は全くありません．しかし，ある程度，背景を知っておいた方が，誘導に上手く乗っかれると思うので，解説したいと思います．

⇨注　分数型漸化式は前回の Part Ⅰ の型がメインです．まずはこの型を確実にマスターすること．今回の Part Ⅱ は無理に学習する必要はありません．

うん　他にもイロイロすることあるから これ勉強するのやめとくわ…

Type ⑧　$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$　　$(ps-qr\neq 0,\ \ r\neq 0)$

概ね 2 通りの解法があります．

例えば，次のような意味ありげな誘導が付いた問題があります．

ほんまや 何でこんな置き換えするん？

例題 1　条件 $a_1=4,\ \ a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，

(1) $b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は等比数列になることを示し，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) (1) を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

考え方　これらの置き換えが何を意味するのかわかりませんが，とりあえずやってみます．$\{b_n\}$ が等比数列であることを示すには，$b_{n+1}=pb_n$ の形になることを示せばよいので，始めからこの形になることを想定して解いていきます．

解

nをn+1に上げる

(1) $b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ より，$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+4}$．

よって，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ を代入すると，

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+4}=\frac{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}-2}{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}+4}$$
$$=\frac{4a_n+8-2(a_n+6)}{4a_n+8+4(a_n+6)}$$
$$=\frac{2a_n-4}{8a_n+32}$$
$$=\frac{1}{4}\,\frac{a_n-2}{a_n+4}=\frac{1}{4}b_n$$

うまいことなるねえ　うわっ

したがって，数列 $\{b_n\}$ は，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列である．

(2) (1) より数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+4}=\dfrac{4-2}{4+4}=\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列なので，

$$b_n=b_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=\frac{1}{4^n}$$

したがって，

$$\frac{a_n-2}{a_n+4}=\frac{1}{4^n}$$
$$a_n+4=4^n(a_n-2)$$
$$a_n+4=4^na_n-2\cdot 4^n$$
$$(4^n-1)a_n=2\cdot 4^n+4$$
$$\therefore\ \ a_n=\frac{2(4^n+2)}{4^n-1}$$

このへんの計算は特に問題ないよ

■

それにしても なんでこんなにうまくいくのか…

⇨注　厳密には，この問題の場合も，$a_n > 0$ であることを示してから $a_n \neq -4$ であることを述べないといけませんが，まあいいでしょう．

この解法の最大のポイントは「数列 $\{b_n\}$ が等比数列であること」だったわけですが，もしこのことが指示されなかった場合どうしますか．つまり単に「数列 $\{b_n\}$ が満たす漸化式を求めよ」と言われたら？

とりあえず，b_{n+1} と b_n の関係式を求めねばならないので次のような解答になると思います。

別解　$b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 4}$ より，$b_n(a_n + 4) = a_n - 2$．よって，

$$a_n b_n + 4b_n = a_n - 2$$
$$a_n(b_n - 1) = -4b_n - 2$$
$$a_n = \frac{-4b_n - 2}{b_n - 1}$$

a_n を b_n について解く．
つまり a_n を b_n で表わしたわけです。

すでにわかっている漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 8}{a_n + 6}$ から b_n についての漸化式をつくるためです。

したがって，$a_{n+1} = \dfrac{-4b_{n+1} - 2}{b_{n+1} - 1}$．これらを，漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 8}{a_n + 6}$ に代入して，

$$\frac{-4b_{n+1} - 2}{b_{n+1} - 1} = \frac{4\dfrac{-4b_n - 2}{b_n - 1} + 8}{\dfrac{-4b_n - 2}{b_n - 1} + 6}$$

$$(\text{右辺}) = \frac{4(-4b_n - 2) + 8(b_n - 1)}{-4b_n - 2 + 6(b_n - 1)} = \frac{-8b_n - 16}{2b_n - 8} = \frac{-4b_n - 8}{b_n - 4}$$

なので，

$$\frac{-4b_{n+1} - 2}{b_{n+1} - 1} = \frac{-4b_n - 8}{b_n - 4}$$

数列 $\{b_n\}$ が等比数列かどうかわからなくても．ゴリゴリ代入して計算したら．必然的にそうなるんですね…

$$(-4b_{n+1} - 2)(b_n - 4) = (b_{n+1} - 1)(-4b_n - 8)$$
$$-4b_{n+1}b_n + 16b_{n+1} - 2b_n + 8 = -4b_{n+1}b_n - 8b_{n+1} + 4b_n + 8$$
$$24b_{n+1} = 6b_n$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

これはこれでうまくいってるよな

⇨注　厳密には，この問題の場合も，$b_n \neq 1$ であることも述べねばなりませんが，これも別にいいでしょう．

この **別解** では，b_{n+1} と b_n だけの関係式を作るために，a_{n+1} と a_n を消去しようと考えたわけです．そのために，$b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 4}$ を，変形して (a_n について解いて)，$a_n = \dfrac{-4b_n - 2}{b_n - 1}$ とし，さらに n を $n+1$ に上げて，a_{n+1} を求めました．あとは解答の通り．まあ単純と言えば単純ですが，計算過程がややメンドウな気がします．やはり，「数列 $\{b_n\}$ が等比数列であること」という最初の指示のありがたみを感じずにはいられません．

いずれにしても「$\{b_n\}$ は等比数列である」ことが最大のポイントであり，そのことを利用して解いたわけですが，それにしても，上手く行き過ぎている解答です．

ほんまや
うまくいきすぎ〜