それでは同じ問題を別の方法で解いてみよう．

今回も，この置き換えが何を意味するのかわかりませんが，とりあえずやってみます．

さっきよりもシンプルな置き換えやな…

例題 2　条件 $a_1=4,\ \ a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，

(1) $c_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の満たす漸化式を求め，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) (1) を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解 (1) 漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ より

両辺から2を引くところが最大のポイント

$$a_{n+1}-2=\frac{4a_n+8}{a_n+6}-2 \quad \leftarrow \text{大切なスタート}$$

$$=\frac{4a_n+8-2(a_n+6)}{a_n+6}$$

$$=\frac{2a_n-4}{a_n+6}=\frac{2(a_n-2)}{a_n+6}$$

したがって，両辺の逆数をとって，

$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{a_n+6}{2(a_n-2)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{a_n-2+8}{a_n-2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{8}{a_n-2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{a_n-2}$$

うまいことなるなー

スゲー

$\dfrac{1}{a_n-2}=c_n$ より，$c_{n+1}=4c_n+\dfrac{1}{2}$．

(2) (1) より，

$$c_{n+1}+\frac{1}{6}=4\left(c_n+\frac{1}{6}\right)$$

このタイプの漸化式はもう完ぺきすぎておもしろくないね

つまり，数列 $\left\{c_n+\dfrac{1}{6}\right\}$ は，初項 $c_1+\dfrac{1}{6}$，公比 4 の等比数列なので $\left(c_1=\dfrac{1}{a_1-2}=\dfrac{1}{4-2}=\dfrac{1}{2}\right)$，

$$c_n+\frac{1}{6}=\left(c_1+\frac{1}{6}\right)4^{n-1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\cdot 4^{n-1}=\frac{2}{3}\cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore\quad c_n=\frac{2}{3}\cdot 4^{n-1}-\frac{1}{6}=\frac{4^n-1}{6}$$

よって，$c_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ より，$a_n=\dfrac{1}{c_n}+2$ なので，

$$a_n=\frac{6}{4^n-1}+2=\frac{2(4^n+2)}{4^n-1}$$

■

⇨**注**　厳密には，この問題の場合も，$a_n>2$ であること述べないといけませんが，まあいいでしょう．

⇨**注**　漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ の両辺から 2 を引いて式変形し，両辺に $a_{n+1}-2$ と a_n-2 が現われるのを確認してから逆数をとっています．なかなかうまい方法ですが，それにしても上手く行き過ぎている感じがします．

うん

さて，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ を解くのに 2 通りの方法を紹介しました，いずれも「不思議な置き換え」と「絶妙な式変形」で解けていることが分かります．

しかし，そもそもなぜ，$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$，$c_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ などと置き換えたのでしょうか．-2 や $+4$ なんて数字，どこから出てきたんでしょう …… でもまあ理由はともかく，とりあえず，なんとか解くことができたから，これにて一件落着としましょうかね ……

しかし，誘導を見たときに「ああ，あの解法でやってるんだな」という意識を持つことは必要です．式の意味や解法の背景を全く知らずに解くのと，ある程度，意味を理解したうえで解くのとでは，ずいぶん違うと思います．Type ⑥ のときと同様に，なぜそういう置き換えをするのか全く知らなければ，今一つピンとこないでしょう．

なぜ，そのように置き換えしたのか，その秘密を知りたい人だけ，次のページからの話をお読みください．

どーしようかなー
せっかくやから
ちょっとだけ見るか…　うん

それでは，置き換えの秘密を解説しよう．もう一度言いますが，入試で出題される場合は必ず誘導があるので，置き換えの背景など知らなくても何の問題もありません．「どうしても仕組みが知りたい」というマニアな人だけ，強い気合をもって以下の解説を読み進めていってください．相当ムズイので覚悟してください．

参考 置き換えの秘密

理想追求型

いきなりですが，分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ が

$$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=k\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$$

いきなりだけど．この考え方はこれまでにも何度か登場していますね

そーやった

という（理想的な）形に変形できたと仮定しよう．このとき，α，β，k はどうなるのか調べてみよう（つまり，α，β，k を p，q，r，s を用いて表してみよう，ということです）．

$$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha}{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\beta}=\frac{pa_n+q-\alpha(ra_n+s)}{pa_n+q-\beta(ra_n+s)}=\frac{(p-r\alpha)a_n-(s\alpha-q)}{(p-r\beta)a_n-(s\beta-q)}$$

$$=\frac{(p-r\alpha)\left(a_n-\dfrac{s\alpha-q}{p-r\alpha}\right)}{(p-r\beta)\left(a_n-\dfrac{s\beta-q}{p-r\beta}\right)}=\frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\times\frac{a_n-\dfrac{s\alpha-q}{p-r\alpha}}{a_n-\dfrac{s\beta-q}{p-r\beta}}$$

文字が多くてゴチャゴチャするー

落ちついて計算すれば大丈夫

したがって，これが，$k\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ の形になるためには，

$$k=\frac{p-r\alpha}{p-r\beta},\qquad \alpha=\frac{s\alpha-q}{p-r\alpha},\qquad \beta=\frac{s\beta-q}{p-r\beta}$$

となればよい．このとき，

$$\left.\begin{aligned}\alpha=\frac{s\alpha-q}{p-r\alpha}&\iff p\alpha-r\alpha^2=s\alpha-q\iff\alpha(r\alpha+s)=p\alpha+q\iff\alpha=\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}\\ \beta=\frac{s\beta-q}{p-r\beta}&\iff p\beta-r\beta^2=s\beta-q\iff\beta(r\beta+s)=p\beta+q\iff\beta=\frac{p\beta+q}{r\beta+s}\end{aligned}\right\}$$

$t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ に $t=\alpha,\beta$ を代入したものと考えます。だから…

したがって，α，β は，t についての方程式 $t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ の 2 つの解です（なお，この式は変形すると t の 2 次方程式になるので，α，β 以外に解は存在しません）．

つまり，t についての方程式 $t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ を解けば，分数型漸化式の変形のポイントとなる数 α，β が求まるということです．

しかも，驚くべきことに，

> t についての方程式 $t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ は，もとの漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ において，a_{n+1} と a_n を共に t と置き換えた式に偶然たまたま一致してしまっている！

なんと！！！，分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ を $\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=k\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ という形に変形できるとき，α と β は，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ において a_{n+1} と a_n を共に α と置き換えた式 $t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ を解けば求めることができるのです．何たる偶然，何たる奇跡．これが漸化式の真髄．

$a_{n+1}=pa_n+q$ 型と全く同じ発想です!!