以上より，分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の解法についてまとめると，

▷Point◁

解法 ①

漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ において，a_{n+1} と a_n を共に t と置き換えた式 $t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ の 2 つの解を，α，β とするとき，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ は

$$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=k\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$$

という形に変形できる．ここで，$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=b_n$ とおけば，$b_{n+1}=kb_n$ となり，**Type ①** の漸化式に帰着される．

これが 例題 1 の置き換えの秘密です．

つまり，例題 1 では，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ を解く際に，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ において，a_{n+1} と a_n を共に t と置き換えて，

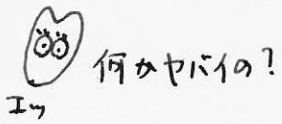
$$t=\frac{4t+8}{t+6}\iff t^2+2t-8=0$$

よって，$(t-2)(t+4)=0$ より，$t=2,\ -4$.

したがって，$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ と置き換えたわけです．これにて一件落着．メデタシメデタシ．

し，しかし，この解法には重大な欠点があります．

次のような疑問の声に対してどのように答えますか？



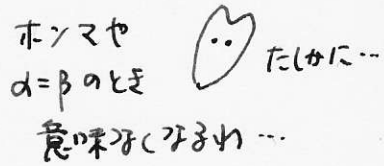
素朴な疑問

漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ において，a_{n+1} と a_n を共に t と置き換えた式 $t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ の 2 つの解を，α，β として，$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=b_n$ と置き換えればうまく解けることはわかりましたが，2 つの解 α，β が，$\alpha=\beta$ になるとき，つまり重解になるときはどうするんですか？

$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\alpha}=1$ となって，なんだかワケわかんなくなりますが・・・・

たしかに，重解（$\alpha=\beta$）の場合，$b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=1$ となってしまい，置き換えの意味がなくなってしまいます．

そこで，つぎの **解法 ②** に従います．



▷Point◁

解法 ②

漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ において，a_{n+1} と a_n を共に t と置き換えた式 $t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ の 2 つの解のうちの一つを，α とするとき，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ は

$$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=A\frac{1}{a_n-\alpha}+B$$

という形に変形できる．ここで，$\dfrac{1}{a_n-\alpha}=c_n$ とおけば，$c_{n+1}=cb_n+B$ となり，**Type ③** の漸化式に帰着される．

この解法の凄いところは，$t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ の 2 つの解のうちの一つを α とし，この α だけを用いて変形しています．つまり，$t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ の解が 2 つだろうが重解で 1 つになろうが全く関係がないのです．

こうすれば問題ないネ!!

これが **例題 2** の置き換えの秘密です．

例題 2 は，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ において，a_{n+1} と a_n を共に t と置き換えた式 $t=\dfrac{4t+8}{t+6}$ が重解をもつわけではありませんが，あえてこの方法で解いてみたわけです．

いちおう証明しておきます．

証明

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-\alpha &= \frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha \\
&= \frac{pa_n+q-\alpha(ra_n+s)}{ra_n+s} \\
&= \frac{(p-r\alpha)a_n-(s\alpha-q)}{ra_n+s} \\
&= \frac{(p-r\alpha)\left(a_n-\dfrac{s\alpha-q}{p-r\alpha}\right)}{ra_n+s} \\
&= \frac{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)}{ra_n+s}
\end{aligned}$$

両辺から α を引く．これが最大のポイント

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+1}-\alpha} &= \frac{ra_n+s}{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)} \\
&= \frac{r(a_n-\alpha)+r\alpha+s}{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)} \\
&= \frac{r(a_n-\alpha)}{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)}+\frac{p-r\alpha}{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)} \\
&= \frac{r}{p-r\alpha}+\frac{r\alpha+s}{p-r\alpha}\cdot\frac{1}{a_n-\alpha} \\
&= A\frac{1}{a_n-\alpha}+B
\end{aligned}$$

$\left(\dfrac{r\alpha+s}{p-r\alpha}=A,\ \dfrac{r}{p-r\alpha}=B\right.$ とおいた．$\left.\right)$

計算は相変らずメンドクサイ--

注 式中の (※) 部分の変形について．α は $t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ の解 (の一つ) なので，

$$\alpha=\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}\iff\alpha(r\alpha+s)=p\alpha+q\iff p\alpha-r\alpha^2=s\alpha-q\iff\alpha=\frac{s\alpha-q}{p-r\alpha}$$

という理由に基づきます．**解法 ①** の説明の途中で登場した式変形の逆をたどっているだけです．このことからも，**解法 ①** と **解法 ②** が「同じ穴のムジナ」であることがわかると思います．

さて，最後に一言．漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の一般的な解法の仕組みを紹介してきましたが，何度も言っているように，入試で出題される場合は，必ず誘導やヒントがあるので，全く知らなくても大丈夫です．

最初の **例題 1** と **例題 2** の問題が解ければそれで十分です．この問題で登場する式変形をマスターしよう．

あんまり深入りしませーん

はーい