変則マニアック型漸化式の解法を学ぶ

変則でマニアックな型というわけですから，多種多様なものがワンサカあります．キリがないので，その中から代表的な Type を 2 つ紹介します．

- 累乗型 $a_{n+1} = pa_n{}^q$ ……Type ⑨
- 係数に n などを含むタイプ ……Type ⑩

Type ⑨　累乗型　$a_{n+1} = pa_n{}^q$

パッと見
簡単そうですけど…　どーすんの？

▷Point◁

真数>0 だからですよ

(数列の各項が正であることを確認した上で) 両辺の対数をとる．

数列やのに 対数使うん？

底は何でも構わない ($p \neq 1$ ならば p を底にすると計算がやや楽になるが，たいして変わらない)．

その後，$\log_p a_n = b_n$ とおくと，Type ③ 型の漸化式に帰着される．

エ～ッ
イヤヤ～

例題 次の漸化式を解け．　$a_1 = 10,\quad a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$

考え方 パッと見，累乗型ではなさそうですが，$a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} = 2(a_n)^{\frac{1}{2}}$ なので累乗型です．

解 漸化式より $a_n > 0$ なので，漸化式の両辺に底を 2 とする対数をとると，

一言述べる

$$\begin{aligned}\log_2 a_{n+1} &= \log_2(2\sqrt{a_n})\\ &= \log_2 2 + \log_2\sqrt{a_n}\\ &= 1 + \frac{1}{2}\log_2 a_n\end{aligned}$$

$\log_2 a_n = b_n$ とおくと，

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 1 \quad \longleftarrow \text{Type ③ の漸化式}$$

よって，

$$b_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(b_n - 2)$$

つまり，数列 $\{b_n - 2\}$ は，初項 $b_1 - 2$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列なので，

$$\begin{aligned}b_n - 2 &= (b_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= ((\log_2 10) - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$(b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 10)$

$$b_n = 2 + ((\log_2 10) - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，

この答の形
ヤバクネ？

$$a_n = 2^{b_n} = 2^{2+((\log_2 10)-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

まさか漸化式に
対数使うとは
思わんかったよ

注 いちおうこれで終了ですが，最後の a_n の形があまりにも悲惨なので，もう少し，いじくってみます．

まず，$(\log_2 10) - 2 = \log_2 10 - \log_2 4 = \log_2 \frac{5}{2}$ なので，

$$\begin{aligned}a_n &= 2^{2+((\log_2 10)-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\\ &= 2^2 \times 2^{\left(\log_2 \frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\\ &= 4 \times \left(2^{\log_2 \frac{5}{2}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\\ &= 4\left(\frac{5}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\\ &= 4\left(\frac{5}{2}\right)^{2^{1-n}}\end{aligned}$$

重要公式

$$a^{\log_a M} = M$$

を用いました。

このへんで
カンベンして下さい

Type ⑩　係数に n などを含むタイプ

漠然とした言い方やな…
サッパリわからん…

このタイトルだと何のことだかわかりませんが，次のような問題のことです．2 通りの解法があります．どちらも重要な考え方なのでしっかり理解してください

例題　次の漸化式を解け．

(1)　$a_1=1,\quad na_{n+1}=(n+1)a_n$　　(2)　$a_1=1,\quad na_{n+1}=(n+2)a_n$

似てるような
似てないような…

解法 ①　具体的に書き出して，順番に計算していく．　⟶　うまく約分できる

解　(1)　$na_{n+1}=(n+1)a_n$ より，$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$

よって，$n\geqq 2$ のとき，

漸化式を変形して順番に入れていきます

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n}{n-1}a_{n-1} \\
&= \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}a_{n-2} \\
&= \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}a_{n-3} \\
&\cdots \\
&= \frac{n}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n-2}}\cdot\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-3}}\cdots\cdots\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{1}a_1 \quad (n\geqq 2)
\end{aligned}
$$

$a_{n-1}=\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-2}$ を代入

$a_{n-2}=\dfrac{n-2}{n-3}a_{n-3}$ を代入

うわ～
どんどん約分できてる～
オモロー

スゲ～

$\therefore\ a_n=\dfrac{n}{1}a_1=n$（$n=1$ のときも正しい）

⇨注　$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$ を「公比 $\dfrac{n+1}{n}$ の等比数列である」と考えてはいけません．注意しよう．

(2)　$na_{n+1}=(n+2)a_n$ より，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n$

$a_{n+1}=\underset{\text{定数}}{p}\,a_n \Rightarrow$ 等比数列

よって，$n\geqq 2$ のとき，

さっきと同様に漸化式を変形して順番に代入します。

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n+1}{n-1}a_{n-1} \\
&= \frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}a_{n-2} \\
&= \frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}a_{n-3} \\
&= \frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n-2}{n-4}a_{n-4} \\
&\cdots \\
&= \frac{n+1}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{n}{\cancel{n-2}}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n-3}}\cdot\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-4}}\cdots\cdots\frac{\cancel{6}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{4}}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{1}a_1 \quad (n\geqq 2)
\end{aligned}
$$

$a_{n-1}=\dfrac{n}{n-2}a_{n-2}$ を代入

$a_{n-2}=\dfrac{n-1}{n-3}a_{n-3}$ を代入

$a_{n-3}=\dfrac{n-2}{n-4}a_{n-4}$ を代入

うわ～ ここでも
スッキリ約分できる～
ヤッホーイ

$\therefore\ a_n=\dfrac{(n+1)n}{2\cdot 1}a_1=\dfrac{n(n+1)}{2}$（$n=1$ のときも正しい）

⇨注　$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n$ を「公比 $\dfrac{n+2}{n}$ の等比数列である」と考えてはいけません．注意しよう．

大丈夫 okよ