⇨注　a_n のところで「$n \geqq 2$」となっているのは，式中に $n-1$ が出てくるためです．$n-1$ があるときは $n \geqq 2$ とする例はこれまでもたびたび登場しています．$n \geqq 2$ として計算し，最後に $n=1$ のときも成立することを確認しているのです．

⇨注　これらの解法を見ると「これは単なる予想じゃないのか」と思うかもしれませんが，a_n の形を予想したのではなく，漸化式を繰り返し用いて，$a_n =$ の計算をそのまま継続しただけなので問題ありません．

しかしながら，次のように a_1，a_2，…，と下から計算を上っていくと，確かにイメージしやすいですが「予想っぽい」感じがするので避けたほうが無難でしょう．

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{3}{1}a_1$$

$$a_3 = \frac{4}{2}a_2 = \frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}a_1$$

$$a_4 = \frac{5}{3}a_3 = \frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}a_1$$

$$a_5 = \frac{6}{4}a_3 = \frac{6}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}a_1$$

…

1つ1つ"順番に代入していきます。

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ と順番に考えた方がわかりやすいけど…
確かに"予想"みたいな感じもするな…

最初のやり方でマスターしとこう　はーい

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}a_{n-1} = \frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n-2}{n-4}\cdots\frac{6}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}a_1 \quad (n \geqq 2)$$

$$\therefore\ a_n = \frac{(n+1)n}{2\cdot 1}\cdot a_1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n=1 \text{ のときも正しい})$$

さて，より直接的に解答したい場合は，次の $\boxed{\text{解法②}}$ に従ってください．おそらく参考書などの模範解答は $\boxed{\text{解法②}}$ だと思います．

$\boxed{\text{解法②}}$　a_n には n がらみの式，a_{n+1} には $n+1$ がらみの式を対応させる．　どーゆーこと？

解　(1)　$na_{n+1} = (n+1)a_n$ の両辺を $n(n+1)$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} \quad \cdots ②$$

$c_n = \dfrac{a_n}{n}$ とおくと，② は，$c_{n+1} = c_n$ となり，数列 $\{c_n\}$ が一定の値であることを表しているので，

$$c_n = c_1 = \frac{a_1}{1} = 1$$

$$\therefore\ a_n = n\cdot c_n = n$$

実にシンプルでスッキリしたやり方やな…

うん

■

⇨注　a_{n+1} に n が，a_n に $n+1$ がそれぞれ対応しているので，n と $n+1$ を入れ換えるために両辺を $n(n+1)$ で割ったのです．そうすることで，a_{n+1} に $n+1$ が，a_n に n が対応することになり（② の式），うまく置き換えできたわけです．

(2)　$na_{n+1} = (n+2)a_n$ の両辺を $n(n+1)(n+2)$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_n}{n(n+1)} \quad \cdots ③$$

$d_n = \dfrac{a_n}{n(n+1)}$ とおくと，③ は，$d_{n+1} = d_n$ となり，数列 $\{d_n\}$ が一定の値であることを表しているので，

$$d_n = d_1 = \frac{a_1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a_n = n(n+1)\cdot d_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

これはこれでわかるけど．さっきの方がおもしろいよ

■

つまんなーい

うまく置きかえできるようにするのね

ナルホド～工夫が必要やな

注 (1) の方法を真似て，両辺を $n(n+2)$ で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{n+2}=\dfrac{a_n}{n}$ となります．一瞬，うまくいったかと思うのですが，右辺部 $\dfrac{a_n}{n}$ の n をそっくりそのまま $n+1$ に置き換えても，左辺部に等しくないので失敗です．

式の左辺部と右辺部がうまく n を $n+1$ に置き換えた形になるように，うまく両辺を割る必要があります．

注 $\boxed{\text{解法②}}$ に共通する考え方は，これまでにもたびたび登場しています．

例えば，$\boxed{\text{Type ⑤}}$ の，$a_{n+1}=2a_n+3^n$ という漸化式を解く際，両辺を 3^{n+1} で割って，

$$a_{n+1}=2a_n+3^n \iff \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$$

と変形したのは，a_{n+1} に 3^{n+1} を，a_n に 3^n を対応させたかったためです．

また，$\boxed{\text{Type ⑥}}$ の，$a_{n+1}=3a_n+4n$ という漸化式を解く際，理想的な形

そう言われりゃそんな気もするね

ふーん

$$a_{n+1}=3a_n+4n$$
$$\iff a_{n+1}+p(n+1)+q=3(a_n+pn+q)$$

と変形したのも，a_{n+1} に $p(n+1)+q$ を，a_n に $pn+q$ を対応させたかったためです．

このように，a_n には n がらみの式，a_{n+1} には $n+1$ がらみの式を対応させるという方法は，とても重要な考え方で，漸化式のあらゆる場面で登場します．

参考までにもう一問．これも割とよく登場する有名問題です．

> **例題** 次の漸化式を解け．
> $$a_1=1,\quad na_{n+1}=(n+1)a_n+1$$

考え方 先ほどの **例題** とよく似ていますが，末尾に定数 $+1$ が存在すると，残念ながら，$\boxed{\text{解法①}}$ では無理で，$\boxed{\text{解法②}}$ でしか解けません．両辺を何かで割るのですが，さて何で割りましょうか？

解 両辺を $n(n+1)$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

あれっ？
ひょっとしてこれは…

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}$$

$\longleftarrow$ $\boxed{\text{Type ④}}$ の漸化式

やっぱり!!
階差数列やんけ!!

忘れたころに登場するね

よって，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ より，

数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項が $\dfrac{1}{n(n+1)}$ なので，

$n\geqq 2$ のとき，
$$\begin{aligned} b_n &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{a_1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= 2-\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

① において $n=1$ とすると，$b_1=2-\dfrac{1}{1}=1$ となり，$b_1=1$ に一致する．

$n=1$ の確認

よって，② は $n\geqq 1$ で成立する．

$$\therefore\ b_n=2-\frac{1}{n}\quad (n\geqq 1)$$

このへんの流れは完ぺきでーす

よって，

$$a_n=nb_n=2n-1$$

■

注 分数型の $\sum$ 計算は，部分分数に分けて縦書きするのでした．これはもう大丈夫ですね．

$$\begin{array}{ccccl} \boxed{\dfrac{1}{1}} & - & \cancel{\dfrac{1}{2}} & & (k=1) \\ \cancel{\dfrac{1}{2}} & - & \cancel{\dfrac{1}{3}} & & (k=2) \\ \cancel{\dfrac{1}{3}} & - & \cancel{\dfrac{1}{4}} & & (k=3) \\ & \vdots & & & \\ \cancel{\dfrac{1}{n-2}} & - & \cancel{\dfrac{1}{n-1}} & & (k=n-2) \\ \cancel{\dfrac{1}{n-1}} & - & \boxed{\dfrac{1}{n}} & & (k=n-1) \\ \hline \end{array}$$

ナナメが消えるお決まりのパターン

これ．大好き!!
オモローイ

左上と右下で1つずつ残ります。