オイラー線

なに～？　オイラー線？ おいらーせん？ おいらせん？　おい!! らせん!!

実に不思議なことに，三角形の重心，垂心，外心は一直線上に並びます．この直線を三角形のオイラー線と呼びます．まずは復習を兼ねて，次の具体例で検証してみよう．犬プリ『垂心と外心のベクトル表示』も参照のこと．

例題 $AB=1$，$AC=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$ である三角形 ABC がある．

(1) 三角形 ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{AG}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(2) 三角形 ABC の垂心を H とする．$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(3) 三角形 ABC の外心を O とする．$\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(4) 重心 G，垂心 H，外心 O の位置関係を調べよ．

(5) $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

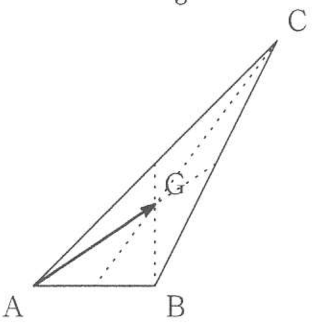
垂心と外心のベクトル表示はもう大丈夫ですね

う～ん　ちょっと自信なし…

考え方 (1) は問題ないでしょう．(2)(3) は，平面 ABC 上の任意の点 P が $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ と表されることを利用します．垂心，外心の性質から s と t の関係式を 2 個つくればよいのです．いずれも「垂直」が絡んでくるので内積を利用することがポイント．　そーやった．そーやった．

実は，今回の場合，三角形 ABC は鈍角三角形になっているので，垂心と外心が三角形の外部にあります．ですが，そんなこと知らなくても機械的に解けるので，気にせずにどんどんやります．　あっそう。

解 (1) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$



これは楽勝♡

よゆう

(2) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ は 1 次独立なので，

$$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

まずはこのように設定するのでした。

とおける．

$CH\perp AB$ より，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$s\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+t\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$s+2t=2$　…①

始点をそろえる

$BH\perp AC$ より，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

始点をそろえる

$s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$2s+9t=2$　…②

①，② より，$s=\dfrac{14}{5}$，$t=-\dfrac{2}{5}$．したがって，

$$\overrightarrow{AH}=\frac{14}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

できた～

注 むしろこの結果をみて，「ああ，垂心は三角形の外部にあるんやな．ということは，三角形 ABC は鈍角三角形やったんか」と気づいてほしいところ．なぜなら，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ のとき，点 P が三角形 ABC の内部にある条件は

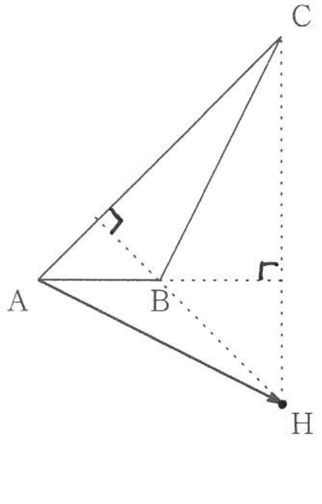
$$0\leqq s+t\leqq 1,\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0$$

とても大切なこと

なので，今回の場合これに適合していません．

ほんまや～

ちなみに　位置関係は以下の通り．



こんなところに垂心Hがあったんか…… たしかに最初から分かることではないね…

ふ～ん　知らんかったわ

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

まずは このように
設定します。

とおける.

辺 AB の中点を L, 辺 AC の中点を M とすると,

LO ⊥ AB より, $\overrightarrow{\mathrm{LO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AL}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

始点を
そろえる

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\left(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$s\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$

$s+2t=\frac{1}{2}$

$2s+4t=1$　…①

MO ⊥ AC より, $\overrightarrow{\mathrm{MO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

始点を
そろえる

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\left(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$

$2s+9t=\frac{9}{2}$

$4s+18t=9$　…②

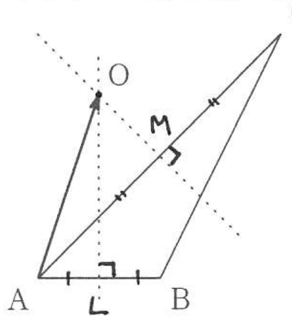
①, ② より, $s=-\frac{9}{10}$, $t=\frac{7}{10}$. したがって,

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=-\frac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{7}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

完成〜

✎注　むしろこの結果をみて,「ああ, 外心は三角形の外部にあるんやな. ということは, 三角形 ABC は鈍角三角形やったんか」と気づいてほしいところ. 理由は (2) と同じ.

ちなみに　位置関係は以下の通り.



あんなところに
あったのね…

ふ〜ん　知らんかった

(4)　(1)(2)(3) より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{14}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=-\frac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{7}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

いったい
G. H. O. に
どんな関係が
あるのかな？

あ〜わかんね.

外心 O を始点に
$\overrightarrow{OG}$・$\overrightarrow{OH}$ をつくると…

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\\&=\left(\frac{1}{3}+\frac{9}{10}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{10}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{37}{30}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{11}{30}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

あれ〜

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\\&=\left(\frac{14}{5}+\frac{9}{10}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(-\frac{2}{5}-\frac{7}{10}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{37}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{11}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

あれあれ〜

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

ヤッタ〜

したがって, 外心 O, 重心 G, 垂心 H は同一直線上にあり, OG : GH = 1 : 2 である.

1　2
O　G　H

(5)　(4) より,

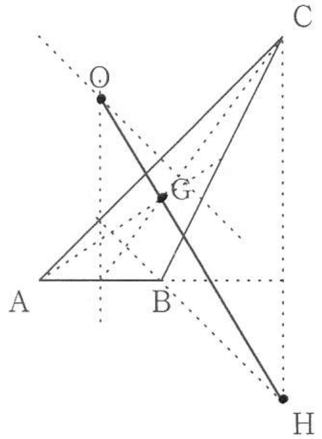
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\\&=3\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

これは とても
美しい結果!!

感動…

この式も美しい….　■

✎注　全部重ねて書くと, 下のようになります.



お〜

たしかに. O. G. H が
一直線上にあります!!

すごいな〜
信じられないよ〜
数学っておもしろいなあ

参考　以上の結果から

$$\text{O が外心, H が垂心}\Longrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であることが分かりましたが, 逆は成立しません. つまり,

$$\text{O が外心, H が垂心}\ \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

しかし, 次の命題は成立するので, 証明しておきましょう.