O が外心　かつ　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
$\Longrightarrow$　H が垂心

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}\\
&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\
&=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\
&=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\\
&=0\ \left(\text{O は外心なので}\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|\right)
\end{aligned}
$$

この証明はわりとよく出ます。

はーい

同様にして，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ になるので，H は三角形 ABC の垂心である．

H が垂心　かつ　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
$\Longrightarrow$　O が外心

$$
\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\\
&=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\
&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\
&=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}\\
&=0\ (\text{H は垂心なので AH} \perp \text{BC})
\end{aligned}
$$

この証明はわりとよく出ます。

はーい

よって，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$.

同様にして，$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|$，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$ になるので，O は三角形 ABC の外心である．

さて，先ほどは具体例で重心 G，垂心 H，外心 O は同一直線上にあり，OG : GH = 1 : 2 になっていることを確認しました．今度は，このことを一般的にベクトルを用いずに証明してみよう．

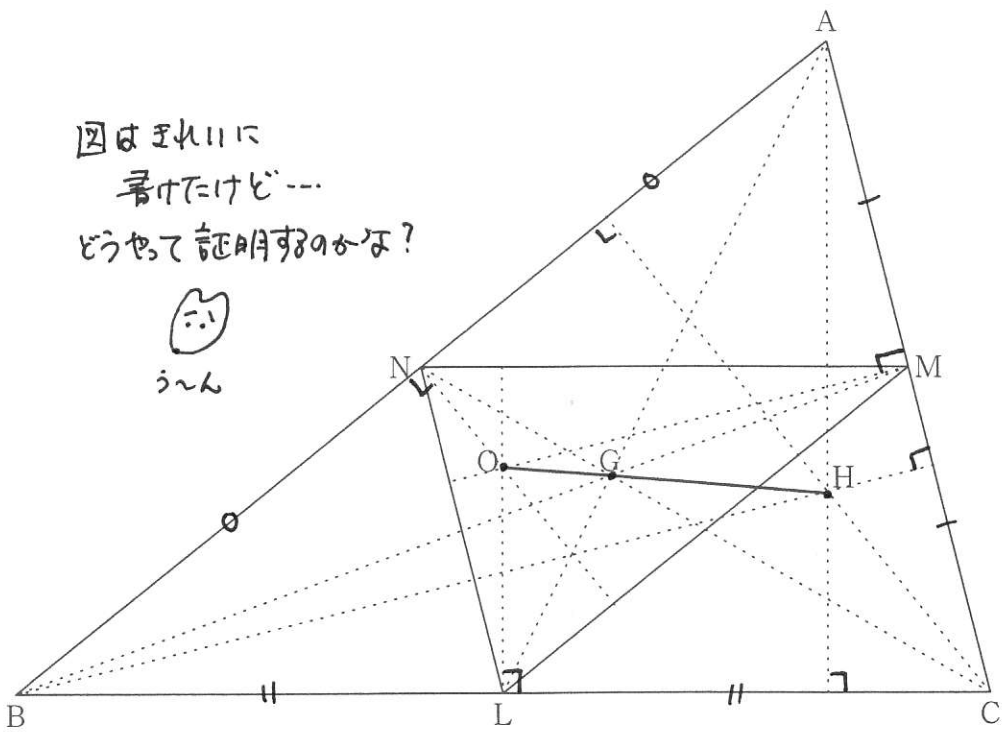
例題　三角形 ABC の重心を G，垂心を H，外心を O とする．重心 G，垂心 H，外心 O は同一直線上にあり，OG : GH = 1 : 2 であることを証明せよ．

考え方　イメージしやすいように，鋭角三角形で考えてみます．3 点が一直線上にあることをベクトルを用いずに証明するのはなかなか難しい．

方針としては，OH と AL の交点を G′ とするとき，垂心と外心の条件だけから，AG′: LG′ = 2 : 1 であることを導き出し，その結果，実は G′ は重心 G そのものであることを示します．

図はきれいに書けたけど…
どうやって証明するのかな？

うーん



でもまあ
重心、外心、垂心が
一直線に並ぶのは
やっぱり不思議

美しいね

証明

三角形ABCの辺BC，CA，ABの中点をそれぞれL，M，Nとする．

OL ⊥ BC，BC // MNより，OL ⊥ MN

OM ⊥ CA，CA // NLより，OM ⊥ NL

ON ⊥ AB，AB // LMより，ON ⊥ LM

よって，三角形ABCの外心Oは，三角形LMNの垂心である．

また，三角形ABC∽三角形LMNで，相似比は2 : 1である

よって，Hは三角形ABCの垂心，Oは三角形LMNの垂心なので，AH : LO = 2 : 1　… ①

OHとALの交点をG′とする．

Hは三角形ABCの垂心なので，AH ⊥ BC.

Oは三角形ABCの外心なので，LO ⊥ BC.

よって，AH // LO　… ②

①，②より，三角形AGH ∽ 三角形LG′O.

よって，AG′: LG′ = 2 : 1　… ③

さて，三角形ABCの重心をGとすると，AG : LG = 2 : 1　… ④

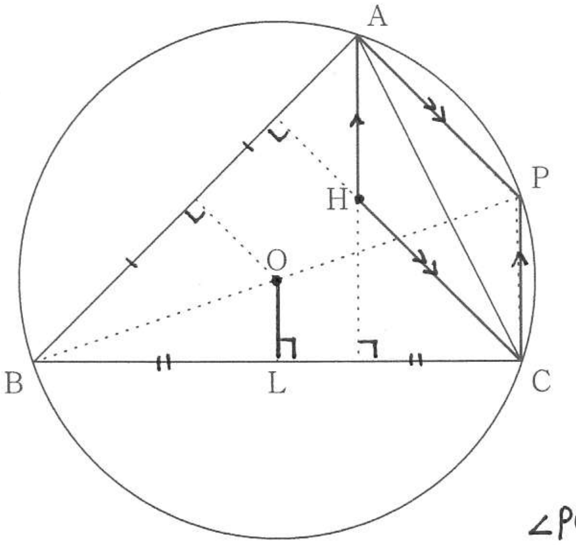
③，④より，G′とGは一致する．

以上より，外心O，重心G，垂心Hは同一直線上にあり，OG : GH = 1 : 2である．

■

別解　上の証明の①②部分の別証明を紹介しよう．

下図のように三角形の外接円を考え，直径BPをとる(✎注　言うまでもないが，直径BPは外心Oを通っている)．



AH ⊥ BC，OL ⊥ BCより，AH // OL

PC ⊥ BC，OL ⊥ BCより，PC // OL

よって，AH // PC.

CH ⊥ AB，PA ⊥ ABより，CH // PA

よって，四角形AHCPは平行四辺形である．

∴　PC = AH

PC : OL = 2 : 1なので，AH : OL = 2 : 1

■

∠PCBは直径の上の円周角なので90°です

おもしろ〜

参考　今回，三角形の重心，垂心，外心の間に成立する不思議な性質を紹介しましたが，三角形の五心に関して，他にも興味深い性質がイロイロあるので，参考までに紹介しておこう．証明は各自で考えてください．どれもこれも有名な性質なので，参考書や問題集に必ず載ってると思います．

△ABCにおいて，辺BC，CA，ABに関して外心Oと対称な点をそれぞれP，Q，Rとする．このとき，Oは△PQRの垂心に一致する．

鋭角三角形ABCの頂点A，B，Cから対辺におろした垂線をそれぞれAD，BE，CFとする．このとき，Hは△DEFの内心に一致する．(△DEFを△ABCの垂足三角形という)

点Pを鋭角三角形ABCの内部の点とし，AP，BP，CPの延長が△ABCの外接円と交わる点をそれぞれD，E，Fとする．このとき，

(1)　Pが△ABCの垂心 ⟹ Pは△DEFの内心

(2)　Pが△ABCの内心 ⟹ Pは△DEFの垂心

これも何だか美しそうな結果やね

スゲ〜

ぜひとも証明に挑戦しよう!!

よしっ!!