空間ベクトルの外積について

すごい裏技らしいなあ〜 どんなんやろ？楽しみ〜♡

空間ベクトルの"外積"という考え方は、大学で習う「線型代数学」の内容になるので大学入試で堂々とロコツに使うのは、ちょっとマズイかもしれません。でも知っているととても便利なので、あくまでも検算用としてマスターしておくと良いでしょう。 OK!!

▷Point◁

1次独立な2つのベクトル $\vec a=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec b=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ に対して、$\vec a$ と $\vec b$ の外積を $\begin{pmatrix}br-cq\\cp-ar\\aq-bp\end{pmatrix}$ と定め、これを $\vec a\times\vec b$ と表す。

おぼえ方（計算方法）

y座標 b q
z座標 c r → br−cq
x座標 a p → cp−ar
y座標 b q → aq−bp

y→z→x→y座標の順に並べて書いて、ナナメ同士をかけて引きます。引く順序をそろえること!!

注 ベクトルの内積と外積は、全くの別物です。

区別しよう 内積 $\vec a\cdot\vec b$（単なる数値） ⟷ 全くちがう ⟷ 外積 $\vec a\times\vec b$（あくまでもベクトル） 記号からして全然ちがう

注 外積は空間ベクトルでのみ定義されます。（内積は平面も空間もどちらもアリでした）

▷Point◁（外積の性質①）

外積 $\vec a\times\vec b$ は $\vec a$ と $\vec b$ に共に垂直である

（証） $\vec a=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec b=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$, $\vec a\times\vec b=\begin{pmatrix}br-cq\\cp-ar\\aq-bp\end{pmatrix}$ だから

内積を使って証明

$\vec a\cdot(\vec a\times\vec b)=a(br-cq)+b(cp-ar)+c(aq-bp)$
$=abr-acq+bcp-abr+caq-bcp=0$

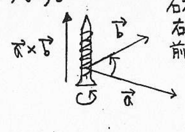
$\vec b\cdot(\vec a\times\vec b)=p(br-cq)+q(cp-ar)+r(aq-bp)$
$=bpr-cpq+cpq-aqr+aqr-bpr=0$

よって $\vec a\times\vec b$ は $\vec a,\vec b$ に共に垂直である。//

フムフム

外積ベクトル $\vec a\times\vec b$ の向き

$\vec a$ と $\vec b$ に共に垂直なベクトルは上下に2本ありますが、$\vec a\times\vec b$ の向きは、$\vec a$ から $\vec b$ へ回転するとき、右ネジの進む方向になります。



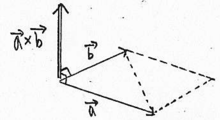
右ネジは右回転で前進します。 ナルホド

▷Point◁（外積の性質②）

"$\vec a$ と $\vec b$ で張られる平行四辺形" ともいいます。

外積 $\vec a\times\vec b$ の大きさ $|\vec a\times\vec b|$ は、$\vec a$ と $\vec b$ を2辺にもつ平行四辺形の面積に等しい

（証） $\vec a=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec b=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$, $\vec a\times\vec b=\begin{pmatrix}br-cq\\cp-ar\\aq-bp\end{pmatrix}$ だから



平行四辺形の面積は3角形の面積の2倍なので（右図参照）

$2\times\frac12\sqrt{|\vec a|^2|\vec b|^2-(\vec a\cdot\vec b)^2}=\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)-(ap+bq+cr)^2}$

$=\sqrt{a^2q^2+a^2r^2+b^2p^2+b^2r^2+c^2p^2+c^2q^2-2abpq-2bcqr-2carp}$

$=\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}=|\vec a\times\vec b|$ //

重要公式

ベクトルの長さが面積に等しいなんて、スゴイ!!

オ〜スゲェ〜

"外積"の考え方を用いると、次のような問題は、一瞬で答えがわかります。 マジで？

（例） $\vec a=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ と $\vec b=\begin{pmatrix}2\\3\\-10\end{pmatrix}$ に共に垂直なベクトルを（何でも良いから）1つ求めよ。
また、共に垂直な単位ベクトルを求めよ。（単位ベクトルとは長さ1のベクトルのこと）

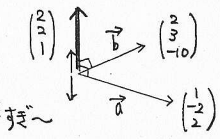
（教科書風にやるなら、求めるベクトルを $\vec p=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とでもおき、$\vec a\cdot\vec p=0$, $\vec b\cdot\vec p=0$ より計算します）

解 $\vec a\times\vec b=\begin{pmatrix}14\\14\\7\end{pmatrix}$ なので、これが $\vec a$ と $\vec b$ に共に垂直なベクトル（の1つ）である。
でも「何でも良い」のなら、7で割って（つまり $\frac17$ 倍に縮めて）、$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ としておこう。//
このベクトルの長さは $\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$ なのでさらに長さ3で割れば単位ベクトルになる。
よって、求める単位ベクトルは、（向きが逆の場合も含めて） $\begin{pmatrix}\pm\frac23\\\pm\frac23\\\pm\frac13\end{pmatrix}$ //
±をつける

−2 3
2 −10 … 20−6
1 2 … 4+10
−2 3 … 3+4

$\begin{pmatrix}20-6\\4+10\\3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\14\\7\end{pmatrix}$ これが $\vec a\times\vec b$

おもしろ〜 すご〜 外積大すき♡

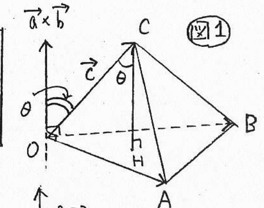


感動… 簡単すぎ〜

☆ 外積を利用した四面体の体積の求め方 ← スゴイでぇ〜

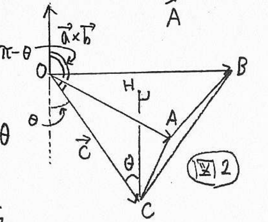
▷Point◁

四面体OABCの体積Vは、$\vec{OA}=\vec a$, $\vec{OB}=\vec b$, $\vec{OC}=\vec c$ とすると
$V=\frac16|(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c|$



（証） △OABの面積Sは、（外積の性質②）より、$S=\frac12|\vec a\times\vec b|$
点Cから平面OABに下ろした垂線の足をHとし、図のように線分CHと$\vec{CO}$のなす角をθとする。このとき
$|\vec{CH}|=|\vec{OC}|\cos\theta=|\vec c|\cos\theta$

∴ $V=\frac13S|\vec{CH}|=\frac13\cdot\frac12|\vec a\times\vec b||\vec c|\cos\theta=\frac16|\vec a\times\vec b||\vec c|\cos\theta$



ここで $\vec a\times\vec b$ と $\vec c$ のなす角を考えると 図1の場合は θ であり、図2の場合は π−θ である。$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ だから

図1の場合、$V=\frac16(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c$、図2の場合、$V=-\frac16(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c$ となる。

よって、図1 図2 の場合を合わせて、$V=\frac16|(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c|$ となる。//

（例） 4点A(3,6,0) B(1,4,0), C(0,5,4), D(3,4,5) のとき四面体ABCDの体積は？
⟶この前の大プリで紹介した問題です。あのときはメチャクチャ大変でしたが…

$\vec{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{AD}=\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}$ より $\underbrace{\vec{AB}\times\vec{AC}}_{外積}=\begin{pmatrix}-8\\8\\-4\end{pmatrix}$（計算略） 感動…

よって $\underbrace{(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}}_{内積}=-8\times0+8\times(-2)+(-4)\times5=-36$

∴ $\frac16|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}|=\frac16|-36|=6$ //