3角形の五心の位置ベクトル

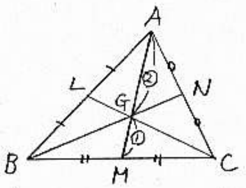
重い心，内気な心，外れた心，まっすぐな心，傍で見守る心… 五つの感情を表しているのです（ウソ）

3角形の五心とは，重心，内心，外心，垂心，傍心のことです。
$\triangle ABC$において，これらの心の位置ベクトルを $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ で表してみよう。

重心Gについて

$\triangle ABC$の中線の交点を重心といいます。

これは基本や〜



辺BCの中点をMとすると

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\frac{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{3}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\quad //$$

シンプルでおぼえやすい!!

（辺AB，BC，CAの中点をL，M，Nとすると $AG:GM=BG:GN=CG:CL=2:1$）

▷Point◁

$\triangle ABC$の重心をGとすると，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$

OのかわりにA，B，Cとすると

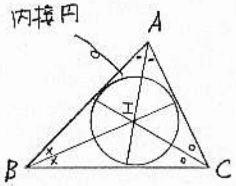
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\\ \overrightarrow{BG}&=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{3}\\ \overrightarrow{CG}&=\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{3}\end{aligned}\right\}$$ となります。

内心I，傍心I_A，I_B，I_Cについて

3つあります!!

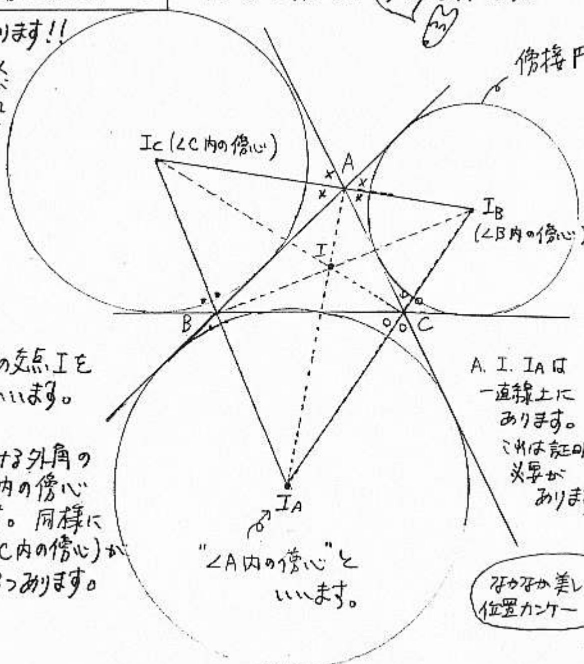
内心と傍心はワンセットです。

ワーい　うまく図がかけてウレシイ



$\triangle ABC$の内角の2等分線の交点Iを内心（内接円の中心）といいます。

$\triangle ABC$の頂点B，Cにおける外角の2等分線の交点I_Aを∠A内の傍心（傍接円の中心）といいます。同様にI_B（∠B内の傍心），I_C（∠C内の傍心）があります。つまり傍心は3つあります。



A，I，I_Aは一直線上にあります。これは証明する必要があります。

なかなか美しい位置カンケー

内心，傍心を考えるにあたり，次の定理が重要になってきます。

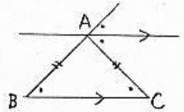
定理1は知ってるけど，定理2は知らん〜

▷Point◁

定理1．$\triangle ABC$の角Aの2等分線と辺BCとの交点Pは辺BCをAB:ACに内分する。

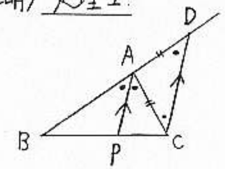
定理2．$AB\neq AC$である$\triangle ABC$の頂点Aにおける外角の2等分線と直線BCとの交点Qは辺BCをAB:ACに外分する。

㊟ 定理2で$AB\neq AC$の条件がなぜあるのかわかりますか？
AB=ACだと頂点Aの外角の2等分線と直線BCが平行になって交わらないからです。



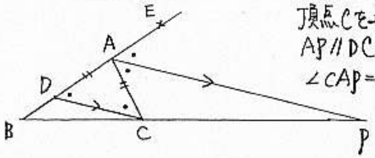
そりゃそうや

（証明）定理1．



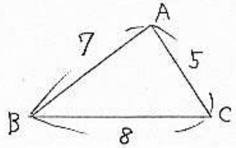
頂点Cを通りAPに平行な直線と直線ABとの交点をDとすると
$AP\parallel DC$より　$\angle BAP=\angle ADC$，$\angle CAP=\angle ACD$
$\angle BAP=\angle CAP$なので　$\angle ADC=\angle ACD$，つまり$AC=AD$
よって　$\triangle ABP\backsim\triangle DBC$より
$BP:PC=BA:AD=AB:AC$
つまり点Pは辺BCをAB:ACに内分する。//

定理2．



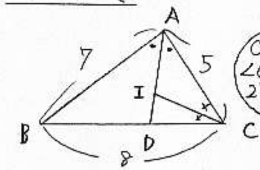
$AB>AC$の場合を証明する。
頂点Cを通りAPに平行な直線と直線ABとの交点をDとすると
$AP\parallel DC$より　$\angle CAP=\angle ACD$，$\angle EAP=\angle ADC$
$\angle CAP=\angle EAP$より　$\angle ACD=\angle ADC$，つまり　$AC=AD$
よって$\triangle BCD\backsim\triangle BPA$より
$BP:PC=BA:AD=AB:AC$
つまり点Pは辺BCをAB:ACに外分する。
$AB<AC$の場合も同様である。//

それでは，まずは具体例で内心，傍心を求めたあとで一般の場合を考えてみよう。



$AB=7$，$BC=8$，$CA=5$であるような$\triangle ABC$において
$\triangle ABC$の内心をI，∠A内の傍心をI_Aとするとき
$\overrightarrow{OI}$，$\overrightarrow{OI_A}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$を用いて表せ。

内心について



∠Aの2等分線と辺BCとの交点をDとする。

ADが∠Aの2等分線だから

$BD:DC=AB:AC=7:5$より，$CD=8\times\frac{5}{12}$

CIが∠Cの2等分線だから

$AI:ID=CA:CD=5:8\times\frac{5}{12}=12:8$

よって

$$\overrightarrow{AI}=\frac{12}{20}\overrightarrow{AD}=\frac{12}{20}\cdot\frac{5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}}{7+5}=\frac{5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}}{20}$$

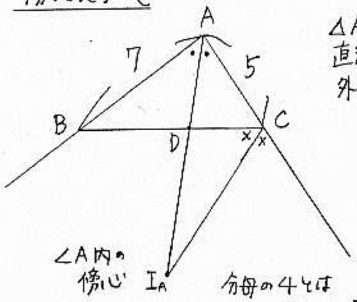
$$\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA}=\frac{5(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+7(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})}{20}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OI}=\frac{8\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}}{20}\quad //$$

辺の長さと係数をくらべると…

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$の係数は何を表しているのかな？

傍心について



∠A内の傍心

$\triangle ACD$に注目すると、頂点Cの外角の2等分線と直線ADの交点がI_Aなので、I_Aは辺ADをCA:CDに外分する。よって

$$AI_A : I_AD = CA : AD = 5 : 8\times\frac{5}{12} = 12 : 8$$

$$\overrightarrow{AI_A} = \frac{12}{12-8}\overrightarrow{AD} = \frac{12}{4}\cdot\frac{5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}}{7+5} = \frac{5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}}{4}$$

$$\overrightarrow{OI_A} - \overrightarrow{OA} = \frac{5(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+7(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})}{4}$$

$$\therefore \overrightarrow{OI_A} = \frac{-8\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{OC}}{4} \quad //$$

分母の4とはいったい何でしょう？

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$の係数に注目。さて、この数字は？

（別解）単位ベクトルの和を利用して求めることもできます（ちょっとメンドウだけど…）。

単位ベクトルについて

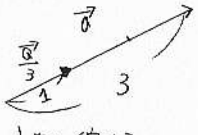
大きさ（長さ）が1であるベクトルを単位ベクトルといいます。
どんなベクトルでも、大きさ（長さ）が1になるように適当に伸び縮みさせれば単位ベクトルになります。

例えば…

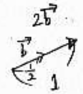
$|\vec{a}| = 3$ のとき $\dfrac{\vec{a}}{3}$ が単位ベクトル

$|\vec{b}| = \dfrac{1}{2}$ のとき $2\vec{b}$ が単位ベクトル

長さを1になるように伸び縮みしました。



$\frac{1}{3}$倍に縮める。



2倍に伸ばす。

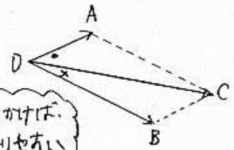
⟶ つまり、$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ が単位ベクトルです。
（大きさ（長さ）で割ればよいのです。）

例えば、$\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ のとき、$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ だから $\dfrac{\vec{a}}{5} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ が単位ベクトル。

ナルホド ナルホド

（確かに $\left|\dfrac{\vec{a}}{5}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$ となっています）

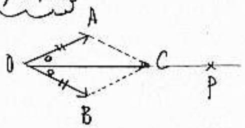
いま、$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$を1次独立な単位ベクトルとすると、和$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$は、∠AOBの2等分線上にあります。



図をかけば、わかりやすい

$|\overrightarrow{OA}| \neq |\overrightarrow{OB}|$ のとき $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ とすると
四角形OACBは平行四辺形になります。
$\therefore \angle AOC \neq \angle BOC$

しっかり区別しよう



$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ のとき $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ とすると
四角形OACBはひし形になります
$\therefore \angle AOC = \angle BOC$
つまり $\overrightarrow{OC}$は∠AOBを2等分します。
よって∠AOBの2等分線上の任意の点をPとすると

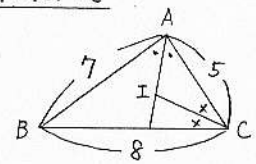
$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OC} = k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ … 単位ベクトルの和の実数倍。

単位ベクトルに限らず$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ならば、常に$\overrightarrow{OC}$は∠AOBを2等分するのです。⟶ 単位ベクトルにしたのは、タマタマなのです。

それでは、単位ベクトルの和を利用して内心、傍心を求めてみよう。

はーい。

内心について



内心Iは∠Aと∠Cの2等分線上にあるので

$$\overrightarrow{AI} = k\left(\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) \cdots ①$$

$$\overrightarrow{CI} = l\left(\frac{1}{8}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CA}\right) \cdots ②$$

単位ベクトルの和の実数倍。

②より $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AC} = l\left(\frac{1}{8}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{8}l\,\overrightarrow{AB} - \frac{1}{8}l\,\overrightarrow{AC} - \frac{1}{5}l\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{8}l\,\overrightarrow{AB} + \left(1-\frac{13}{40}l\right)\overrightarrow{AC} \cdots ③$$

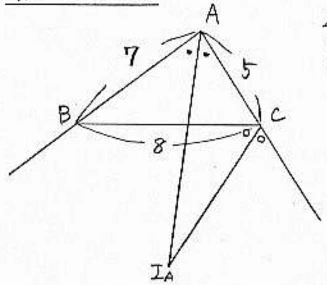
①③より、$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$は1次独立なので（係数比較!!）

$$\begin{cases}\frac{1}{7}k = \frac{1}{8}l\\ \frac{1}{5}k = 1-\frac{13}{40}l\end{cases} \quad \therefore k = \frac{7}{4},\ l = 2$$

よって①に$k = \frac{7}{4}$を代入すると

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{20}\overrightarrow{AC} = \frac{5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}}{20} \quad \text{（以下略）} //$$

傍心について



∠A内の傍心I_Aは、∠Aの2等分線と頂点Cの外角の2等分線上にあるので

$$\overrightarrow{AI_A} = k\left(\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) \cdots ①$$

$$\overrightarrow{CI_A} = l\left(\frac{1}{8}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) \cdots ④$$

上の式②と区別しよう。

④より、$\overrightarrow{AI_A}-\overrightarrow{AC} = l\left(\frac{1}{8}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$$\overrightarrow{AI_A} = \frac{1}{8}l\,\overrightarrow{AB} + \left(1+\frac{3}{40}l\right)\overrightarrow{AC} \cdots ⑤$$

④⑤より $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$は1次独立なので（係数比較）.

$$\begin{cases}\frac{1}{7}k = \frac{1}{8}l\\ \frac{1}{5}k = 1+\frac{3}{40}l\end{cases} \quad \therefore k = \frac{35}{4} \quad l = 10$$

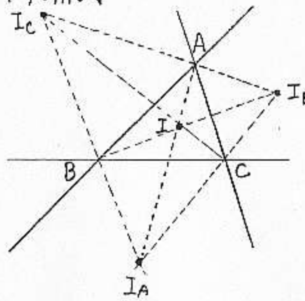
①に$k = \frac{35}{4}$を代入して $\overrightarrow{AI_A} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$ （以下略）//

これはこれで大切な考え方ですが やはり角の2等分線の比を利用する方が、ずっと簡単です。

いずれにしても、内心、傍心について一般的に次のことが成立します。

お〜。辺の長さで決まるのね〜

▷Point◁



BC = a, CA = b, AB = c とすると

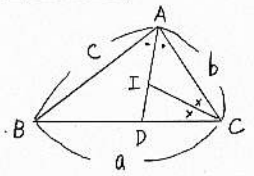
内心 $\overrightarrow{OI} = \dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$

傍心
$$\begin{cases}\overrightarrow{OI_A} = \dfrac{(-a)\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{(-a)+b+c}\\[2ex] \overrightarrow{OI_B} = \dfrac{a\overrightarrow{OA}+(-b)\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+(-b)+c}\\[2ex] \overrightarrow{OI_C} = \dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+(-c)\overrightarrow{OC}}{a+b+(-c)}\end{cases}$$

内心も傍心も3角形の辺の長さだけで決まっています。美しい対称性です。

（証明）先ほどの具体例をそのまま一般化するだけです。

内心について



BD:DC = AB:AC = c:b より　$CD = a\times\dfrac{b}{c+b}$

$AI:ID = CA:CD = b : a\times\dfrac{b}{c+b} = c+b : a$

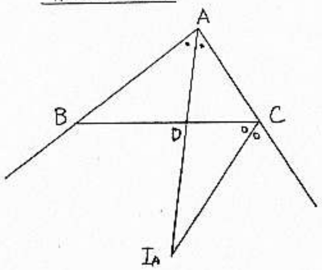
よって $\overrightarrow{AI} = \dfrac{c+b}{c+b+a}\overrightarrow{AD} = \dfrac{c+b}{c+b+a}\,\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{c+b} = \dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{c+b+a}$

$\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA} = \dfrac{b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+c(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})}{a+b+c}$

$\therefore\ \overrightarrow{OI} = \dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$ //

ワーイ できた〜 美しい形ですぅ〜

傍心について



$AI_A : I_AD = CA:CD = b : a\times\dfrac{b}{c+b} = c+b : a$

よって $\overrightarrow{AI_A} = \dfrac{c+b}{c+b-a}\overrightarrow{AD} = \dfrac{c+b}{c+b-a}\,\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{c+b} = \dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{c+b-a}$

$\overrightarrow{OI_A} - \overrightarrow{OA} = \dfrac{b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+c(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})}{-a+b+c}$

$\therefore\ \overrightarrow{OI_A} = \dfrac{-a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OA}}{-a+b+c}$

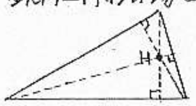
$\overrightarrow{OI_B}$, $\overrightarrow{OI_C}$ についても同様である。

$\overrightarrow{OI}$ の結果で
$\overrightarrow{OI_A}$ は a のかわりに $-a$
$\overrightarrow{OI_B}$ は b のかわりに $-b$
$\overrightarrow{OI_C}$ は c のかわりに $-c$
を代入したものです。

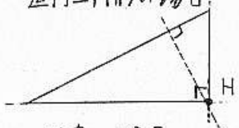
$\boxed{\text{垂心H、外心Qについて}}$　3角形の形状によって垂心、外心の位置がかわります。

3角形の各頂点から向かい合う辺（または その延長）に下ろした垂線の交点を垂心といいます。

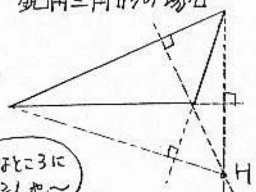
鋭角三角形の場合　　直角三角形の場合　　鈍角三角形の場合



三角形の内部



直角の頂点

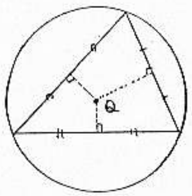


こんなところにあるんや〜

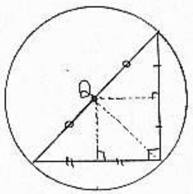
三角形の外部

各辺の垂直2等分線の交点を外心といいます。

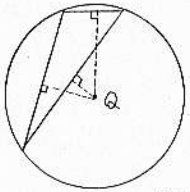
鋭角三角形の場合　　直角三角形の場合　　鈍角三角形の場合



三角形の内部

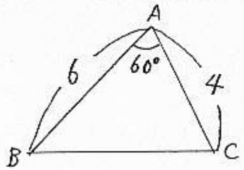


斜辺の中点



三角形の外部

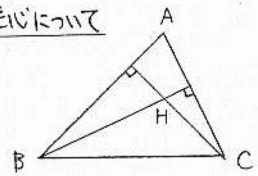
先ほどと同様、まずは具体例で垂心、内心を求めたあとで、一般の場合を考えてみよう。



AB=6、AC=4、∠A=60° であるような△ABCの垂心をH、外心をQとする。$\overrightarrow{AH}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ

まず始めに $|\overrightarrow{AB}|=6$, $|\overrightarrow{AC}|=4$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ = 6\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 12$ である。

垂心について



$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は1次独立なので、$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおける。

このとき　BH⊥AC より　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ …①

CH⊥AB より　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ …②

①より $(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC} = 0$
$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$12s+16t = 12$
$3s+4t = 3$ …①'

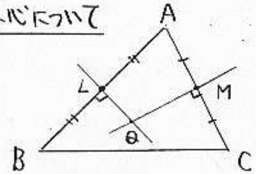
②より $(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB} = 0$
$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$36s+12t = 12$
$3s+t = 1$ …②'

①'②'より　$s=\frac{1}{9}$, $t=\frac{2}{3}$　　$\therefore\ \overrightarrow{AH} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ //

落ち着いて計算しよう。決して難しくないです。

ウン

外心について



$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は1次独立なので $\overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおける

ABの中点をL、ACの中点をMとすると

LQ⊥AB より　$\overrightarrow{LQ}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ …③

MQ⊥AC より　$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ …④

③より $(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AL})\cdot\overrightarrow{AB} = 0$
$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{AB}$
$s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$
$36s+12t = 18$
$6s+2t = 3$ …③'

④より $(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AC} = 0$
$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$
$s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$
$12s+16t = 8$
$3s+4t = 2$ …④'

③'④'より　$s=\frac{4}{9}$, $t=\frac{1}{6}$　　$\therefore\ \overrightarrow{AQ} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ //

垂心の計算方法と全く同じですね。

以上のように、垂心と外心については、2辺の長さとその間の角が与えられている場合、内積を利用した同じような方法で求めることができます（入試問題でも、ほとんどがこのタイプ）。

だから ここまでで十分OK

ところで、$\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AQ}$ を Oを始点に変形してみると….

$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA} = \frac{1}{9}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OH} = \frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{AQ} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA} = \frac{4}{9}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{6}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OQ} = \frac{7}{18}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

⟶ これらの係数は いったい何を表しているのだろうか？

何なん？ いったい