垂心・外心の一般論に入る前に 次の公式を紹介しておこう。三角関数登場！

▷Point◁

△ABCにおいて次の関係式が成立する。

[I] $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

[II] $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

なんで、いきなり三角関数？と思うかもしれませんが、この式が垂心・外心の一般形に重要な役割をします。

そうなん？

(証明) [I] $A+B+C=\pi$ より、$C=\pi-(A+B)$

$$\tan C=\tan(\pi-(A+B))=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\therefore\ \tan C(1-\tan A\tan B)=-(\tan A+\tan B)$$

$$\tan C-\tan A\tan B\tan C=-(\tan A+\tan B)$$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C \quad //$$

落ち着いて計算すれば大丈夫♡

加法定理

[II]
$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}+2\sin C\cos C$$
$$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$

$A+B=\pi-C$ より
$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$

$$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$
$$=2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}$$
$$=2\sin C\cdot 2\cos\frac{A-B+C}{2}\cos\frac{A-B-C}{2}$$

$A+C=\pi-B$ より
$A-B+C=\pi-2B$
$B+C=\pi-A$ より
$A-B-C=A-(B+C)=2A-\pi$

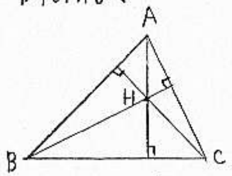
$$=2\sin C\cdot 2\cos\frac{\pi-2B}{2}\cos\frac{2A-\pi}{2}$$
$$=4\sin C\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\cos\left(A-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=4\sin A\sin B\sin C \quad //$$

和→積の公式が大活躍

お見事!!

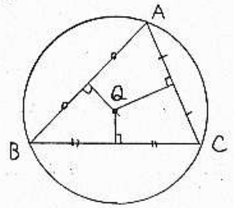
それでは一般論に入ろう。垂心も外心も角度だけで表されていることを意識しよう。

▷Point◁



垂心H
$$\overrightarrow{OH}=\frac{\tan A\cdot\overrightarrow{OA}+\tan B\cdot\overrightarrow{OB}+\tan C\,\overrightarrow{OC}}{\tan A+\tan B+\tan C}$$
(直角三角形の場合を除く)

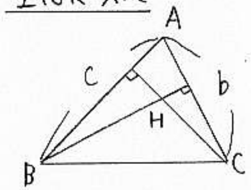
これも美しい



外心Q
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\sin 2A\ \overrightarrow{OA}+\sin 2B\ \overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

外接円の半径だからネ〜 ($|\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{BQ}|=|\overrightarrow{CQ}|$ が成立)

垂心について



$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は1次独立だから、$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおける。

このとき $BH\perp AC$ より $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ …①

$CH\perp AB$ より $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ …②

$$\left(\begin{array}{l}|\overrightarrow{AB}|=c,\ \ |\overrightarrow{AC}|=b\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A\end{array}\right)$$

①より $(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0$
$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$sc\cdot b\cos A+tb^2=c\cdot b\cdot\cos A$$
$$sc\cos A+tb=c\cdot\cos A \ \cdots①'$$

②より $(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$
$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$sc^2+tb\cdot c\cos A=bc\cos A$$
$$sc+tb\cos A=b\cos A \ \cdots②'$$

②'−①'×cosAより
$$sc-sc\cos^2A=b\cos A-c\cos^2A$$
$$sc(1-\cos^2A)=\cos A(b-c\cos A)$$
$$s=\frac{\cos A(b-c\cos A)}{c\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos A(2R\sin B-2R\sin C\cos A)}{2R\sin C\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos A(\sin B-\sin C\cos A)}{\sin C\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos A(\sin(A+C)-\sin C\cos A)}{\sin C\sin^2A}$$
$(\because B=\pi-(A+C)$ より $\sin B=\sin(\pi-(A+B)))$
$$=\frac{\cos A(\sin A\cos C+\cos A\sin C-\sin C\cos A)}{\sin C\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos A\sin A\cos C}{\sin C\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos A\cos C}{\sin A\sin C}=\frac{1}{\tan A\tan C}$$

①'−②'×cosAより
$$tb-tb\cos^2A=c\cos A-b\cos^2A$$
$$tb(1-\cos^2A)=\cos A(c-b\cos A)$$
$$t=\frac{\cos A(c-b\cos A)}{b\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos A(2R\sin C-2R\sin B\cos A)}{2R\sin B\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos A(\sin C-\sin B\cos A)}{\sin B\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos A(\sin(A+B)-\sin B\cos A)}{\sin B\sin^2A}$$
$(\because C=\pi-(A+B)$ より $\sin C=\sin(\pi-(A+B)))$
$$=\frac{\cos A(\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B\cos A)}{\sin B\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos A\cdot\sin A\cos B}{\sin B\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}=\frac{1}{\tan A\tan B}$$

う〜う〜
しんどい

従って以上より
$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{\tan A\tan C}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{\tan A\tan B}\overrightarrow{AC}$$

なかなかシンプルな形…

$$=\frac{\tan B\cdot\overrightarrow{AB}+\tan C\cdot\overrightarrow{AC}}{\tan A\tan B\tan C}$$
$$=\frac{\tan B\cdot\overrightarrow{AB}+\tan C\,\overrightarrow{AC}}{\tan A+\tan B+\tan C}\quad(\because 関係式[I]より)$$

ここでさっきの関係式が登場する〜

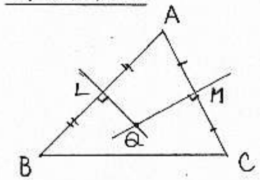
$$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\frac{\tan B\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\tan C(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})}{\tan A+\tan B+\tan C}$$

お見事!!

$$\therefore\ \overrightarrow{OH}=\frac{\tan A\cdot\overrightarrow{OA}+\tan B\cdot\overrightarrow{OB}+\tan C\cdot\overrightarrow{OC}}{\tan A+\tan B+\tan C}\quad //$$

ワーイ 完成♡

外心について



$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は1次独立なので $\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおける

ABの中点をL. ACの中点をMとすると

$LQ\perp AB$ より $\overrightarrow{LQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ …①

$MQ\perp AC$ より $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ …②

$$\left(\begin{aligned}&|\overrightarrow{AB}|=c,\ |\overrightarrow{AC}|=b\\ &\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A\end{aligned}\right)$$

①より
$$(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AL})\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
$$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$2sc^2+2tbc\cos A=c^2$$
$$2sc+2tb\cos A=c \quad\cdots①'$$

②より
$$(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AC}=0$$
$$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$2sbc\cos A+2tb^2=b^2$$
$$2sc\cos A+2tb=b \quad\cdots②'$$

①'−②'×cos A より
$$2sc-2sc\cos^2A=c-b\cos A$$
$$2sc(1-\cos^2A)=c-b\cos A$$
$$s=\frac{c-b\cos A}{2c\sin^2A}$$
$$=\frac{2R\sin C-2R\sin B\cos A}{2\cdot 2R\sin C\sin^2A}$$
$$=\frac{\sin C-\sin B\cos A}{2\sin C\sin^2A}$$
$$=\frac{\sin(A+B)-\sin B\cos A}{2\sin C\sin^2A}$$
$(\because C=\pi-(A+B)$ より $\sin C=\sin(\pi-(A+B)))$
$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B\cos A}{2\sin C\sin^2A}$$
$$=\frac{\sin A\cos B}{2\sin C\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos B}{2\sin A\sin C}$$

②'−①'×cos A より
$$2tb-2tb\cos^2A=b-c\cos A$$
$$2tb(1-\cos^2A)=b-c\cos A$$
$$t=\frac{b-c\cos A}{2b\sin^2A}$$
$$=\frac{2R\sin B-2R\sin C\cos A}{2\cdot 2R\sin B\sin^2A}$$
$$=\frac{\sin B-\sin C\cos A}{2\sin B\sin^2A}$$
$$=\frac{\sin(A+C)-\sin C\cos A}{2\sin B\sin^2A}$$
$(\because B=\pi-(A+C)$ より $\sin B=\sin(\pi-(A+C)))$
$$=\frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C-\sin C\cos A}{2\sin B\sin^2A}$$
$$=\frac{\sin A\cos C}{2\sin B\sin^2A}$$
$$=\frac{\cos C}{2\sin A\sin B}$$

従って以上より.
$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\cos B}{2\sin A\sin C}\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{2\sin A\sin B}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{2\sin B\cos B\,\overrightarrow{AB}+2\sin C\cos C\,\overrightarrow{AC}}{4\sin A\sin B\sin C}$$

2倍角の公式ですよ!!

$$=\frac{\sin 2B\,\overrightarrow{AB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{AC}}{4\sin A\sin B\sin C}=\frac{\sin 2B\cdot\overrightarrow{AB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{AC}}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$
(∵関係式[Ⅱ]より)

$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=\frac{\sin 2B(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\sin 2C(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OQ}=\frac{\sin 2A\,\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\,\overrightarrow{OC}}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\quad //$$

以上で3角形の五心の位置ベクトルがすべて決定しました。まとめておこう。

▷Point◁

重心 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$

垂心 $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\tan A\,\overrightarrow{OA}+\tan B\,\overrightarrow{OB}+\tan C\,\overrightarrow{OC}}{\tan A+\tan B+\tan C}$

内心 $\overrightarrow{OI}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$

外心 $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\sin 2A\,\overrightarrow{OA}+\sin 2B\,\overrightarrow{OB}+\sin 2C\,\overrightarrow{OC}}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$

傍心
$$\begin{cases}\overrightarrow{OI_A}=\dfrac{-a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{-a+b+c}\\[2mm]\overrightarrow{OI_B}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}-b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a-b+c}\\[2mm]\overrightarrow{OI_C}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}-c\overrightarrow{OC}}{a+b-c}\end{cases}$$

(※) 内心と傍心は、辺の長さで
垂心と外心は角の大きさで
決定していることに注意しよう。

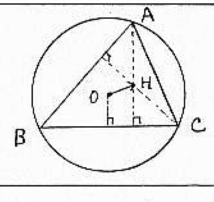
どれも美しい形やな　ほんまや〜

これらの中で重心は必ずおぼえること。内心は"おぼえておいても良いかな〜"という程度で、その他はおぼえる必要はありません(導き出し方をcheckする程度で十分)。特に垂心と外心については、2辺の長さとその間の角、内積の値などが与えられる場合がほとんどなので、これらの一般形は、ただ形が美しいというだけであまり役には立ちません。

せっかく求めたのに…

例えば、次の有名問題においても上の結果は全く役に立ちません。

$\triangle ABC$ の外心をO、垂心をHとするとき、
$\overrightarrow{OH}$ を、$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ を用いて表わせ。

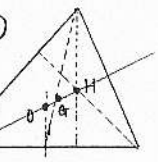


(注) これまで外心はQとおいてきたが、ここではOが外心であることに注意しよう。

この問題を解くには、次の"オイラー線"についての予備知識がないとムリでしょうね。

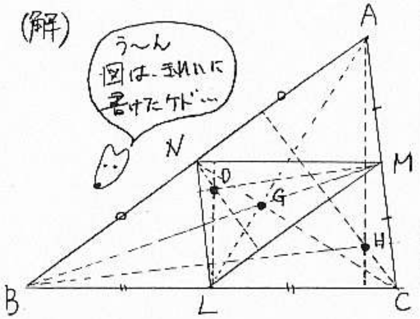
▷Point◁

3角形の外心をO、重心をG、垂心をHとするとき
O、G、H は、この順に一直線上に並び、OG：GH＝1：2
が成立する。この直線をオイラー線という。



(注) 正三角形の場合、外心と重心と垂心が一致するので、オイラー線は存在しません。
まずは、このオイラー線についての命題を証明してから上の問題の解答に入りましょう。

(解)



△ABCの辺BC, CA, ABの中点をそれぞれL, M, Nとする。

$OL \perp BC$, $BC /\!/ MN$ より $OL \perp MN$
$OM \perp CA$, $CA /\!/ NL$ より $OM \perp NL$
$ON \perp AB$, $AB /\!/ LM$ より $ON \perp LM$

よって△ABCの外心Oは△LMNの垂心に一致する。

△ABC∽△LMNであり、相似比2:1なので $AH : LO = 2 : 1$

また△ABCの重心をGとすると A, G, Lは同一直線上にあり $AG : GL = 2 : 1$

$AH /\!/ LO$ より $\angle GHA = \angle GOL$

よって△AGH∽△LGOになるので $\angle GHA = \angle GOL$.

従って3点O, G, Hはこの順で一直線上にあり $OG : GH = 1 : 2$ が成立する。

$$\therefore \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = 3 \cdot \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \quad /\!/$$

前半は中学生レベルの知識でOKやなあ〜

理解できる〜

(別解) もし始めから「$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$」となることがわかっていたら、次のようにして証明することもできます(そんな人はあまりいないと思うけど…)。

知らん!!

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH'}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\\ &= (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\\ &= |\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2\\ &= 0 \quad (\because \text{Oは△ABCの外心だから } |\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|)\end{aligned}$$

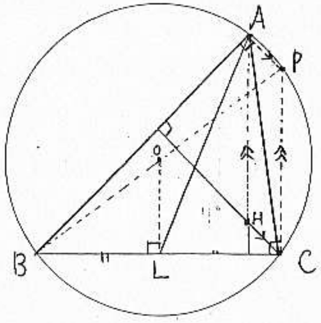
同様にして $\overrightarrow{BH'}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$, $\overrightarrow{CH'}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

よって H'は△ABCの垂心Hに一致する。

$\therefore \overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OH}$ 　　よって $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ //

(別解) 前半のオイラー線の部分の証明は次のようにもできます。

直径上の円周角がポイントです。



図のように直径BPをとる

$OL \perp BC$, $PC \perp BC$ より $OL /\!/ PC$. $OL : PC = 1 : 2$

$CH \perp AB$, $PA \perp AB$ より $CH /\!/ PA$

よって四角形AHCPは平行四辺形 ∴ $PC = AH$

よって $AH : LO = 2 : 1$ (以下同略・上の証明に続く)

いずれにしてもオイラー線のことは証明も含めて知っておいた方がよさそうですね。

はーい おぼえておきます。

(補足) 実は△ABCと点Pに対して次のような関係が成立します。

▷Point◁

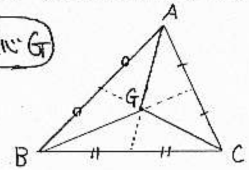
△PBC:△PCA:△PAB = $x : y : z$ (面積比) のとき $\overrightarrow{OP} = \dfrac{x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}}{x+y+z}$

(※) ただし、3角形がすべて△ABCの外部にある場合は負の面積とする。

この関係は、とても興味深いので、また別の機会に詳しく説明します。
とりあえず、このことを認めれば、3角形の面積比さえわかれば $\overrightarrow{OP}$ は決定するので、点Pが3角形の五心の場合の面積比を調べてみよう。

エ〜 今までの努力は、いったい…

重心G

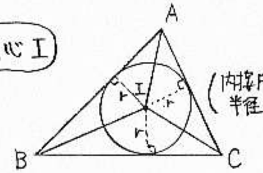


△GBC:△GCA:△GAB = 1:1:1

$$\therefore \overrightarrow{OG} = \frac{1\overrightarrow{OA}+1\overrightarrow{OB}+1\overrightarrow{OC}}{1+1+1} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3} \quad /\!/$$

これは簡単♡

内心I



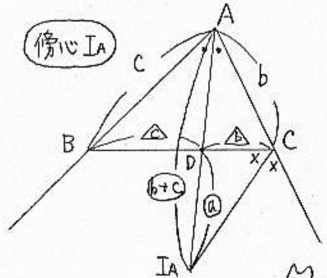
(内接円の半径r)

△IBC:△ICA:△IAB = $\frac{1}{2}ar : \frac{1}{2}br : \frac{1}{2}cr$
$= a : b : c$

$$\therefore \overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \quad /\!/$$

お〜 うまくいった!!

傍心I_A



$CD : DB = b : c$ より △I_ACA:△I_AAB = $b : c$

$AI_A : I_AD = b+c : a$ より (すでに証明済み)

△I_ACA+△I_AAB : △I_ABC = $b+c : a$

∴ △I_ABC:△I_ACA:△I_AAB = $a : b : c$

△I_ABCは△ABCの外部にあるので面積を負にとって

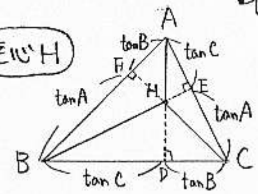
△I_ABC:△I_ACA:△I_AAB = $-a : b : c$ とし

$$\overrightarrow{OI_A} = \frac{-a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{-a+b+c} \quad /\!/$$

($\overrightarrow{OI_B}$, $\overrightarrow{OI_C}$ も同様)

いやや〜

垂心H



$AD = BD\tan B = DC\tan C$ より $BD : DC = \tan C : \tan B$

同様にして $CE : EA = \tan A : \tan C$, $AF : FB = \tan B : \tan A$

よって △HBC:△HCA = $\tan A : \tan B$

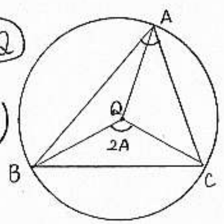
△HCA:△HAB = $\tan B : \tan C$

∴ △HBC:△HCA:△HAB = $\tan A : \tan B : \tan C$

$$\text{よって } \overrightarrow{OH} = \frac{\tan A\,\overrightarrow{OA}+\tan B\,\overrightarrow{OB}+\tan C\,\overrightarrow{OC}}{\tan A+\tan B+\tan C} \quad /\!/$$

感動

外心Q



(外接円の半径R)

△QBC:△QCA:△QAB = $\frac{1}{2}R^2\sin 2A : \frac{1}{2}R^2\sin 2B : \frac{1}{2}R^2\sin 2C$
$= \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

中心角は円周角の2倍です…

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \frac{\sin 2A\,\overrightarrow{OA}+\sin 2B\,\overrightarrow{OB}+\sin 2C\,\overrightarrow{OC}}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C} \quad /\!/$$