直線上の点，平面上の点

これはマジで大切やで～

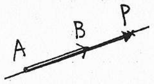
ある点Pが，与えられた直線上や平面上に存在する(のっかっている)ための条件を考えよう。
この考え方は図形のいろいろな問題に応用される重要な考え方なので必ずマスターしよう。

☆直線上の点
(2点A, Bは異なる点とする)

これは前にやった!!

> 点Pが直線AB上にある
> $\iff \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ となる実数tが存在する

(始点はBでもOK。Aを始点に考えたのは後ほどの式の形の美しさを考えてのこと。たまたま。)



$\overrightarrow{AB}$を適当に伸縮すれば$\overrightarrow{AP}$になることを示しています。

よって，このとき

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

$1-t=s$とおくと

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ (s+t=1)$$

▷Point◁

> 点Pが直線AB上にある
> $\iff \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ と表せる …①
> $\iff \overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ と表せる $(s+t=1)$ …②

☆3点を通る直線

ないやろ～ ふつうは…

▷Point◁

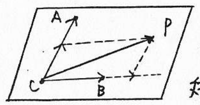
> 3点A, B, Cが同一直線にある
> $\iff$ 直線AB上に点Cが存在する

2点を通る直線はただ1本存在しますが，3点だとそうはいきません。3点を通る直線を考えるときは"2点を通る直線上に残りの1点がのっかっている"と考えます。

☆平面上の点
(3点A, B, Cは同一直線上にない異なる点とする)

> 点Pが平面ABC上にある
> $\iff \overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数s, tが存在する

(始点はAでもBでもOK。Cを始点に考えたのは後ほどの式の形の美しさを考えてのこと。たまたま。)



$\overrightarrow{CA}$と$\overrightarrow{CB}$を適当に伸縮して加えれば$\overrightarrow{CP}$になる，つまり$\overrightarrow{CP}$を対角線とする平行四辺形が作れることを示しています。

よって，このとき

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=s(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$$
$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+\underbrace{(1-s-t)}\overrightarrow{OC}$$

$1-s-t=u$とおくと

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}\ (s+t+u=1)$$

なんか似てる～

▷Point◁

> 点Pが平面ABC上にある
> $\iff \overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ と表せる …③
> $\iff \overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$ と表せる $(s+t+u=1)$ …④

☆4点を通る平面

そんなんあるんか～?

▷Point◁

> 4点A, B, C, Dが同一平面上にある
> $\iff$ 平面ABC上に点Dが存在する.

3点を通る平面はただ1枚存在しますが，4点だとそうはいきません。4点を通る平面を考えるときは"3点を通る平面上に残りの1点がのっかっている"と考えます。

注　①と②，③と④は，それぞれ全く同じ意味ですが(変形しただけ)，どちらを利用するのかは，状況に応じて判断するしかありません。一長一短です。例えば次のような問題の場合.

(問)"A(3, 1, 2), B(4, 2, 3), C(5, 2, 5), D(−2, −1, z)が同一平面上にあるようなzを求めよ"

③を利用すると… $\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$より

$$\begin{pmatrix}-5\\-2\\z-2\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

始点をAにしてみました

$$\therefore\begin{cases}-5=s+2t\\-2=s+t\\z-2=s+3t\end{cases}$$ … 文字3つで式3つ

こっちはまだマシ。

④を利用すると… $\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}\ (s+t+u=1)$より

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix}$$

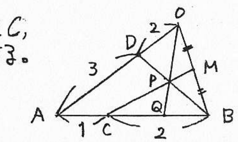
$$\begin{cases}-2=3s+4t+5u\\-1=s+2t+2u\\z=2s+3t+5u\\s+t+u=1\end{cases}$$ … 文字4つで式4つ

メンドクサイなぁ～

→このように文字の数，式の数が増えてしまうので，この場合は③を利用するのがbetterです。
しかし次のような問題の場合は②，④を利用するのがbetterです。

は～い

△ABCにおいて，辺OBの中点をM，辺ABを1：2に内分する点をC，辺OAを2：3に内分する点をD，直線CMと直線BDの交点をPとする。
(1) $\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$で表せ。
(2) 直線OPと辺ABの交点をQとするときAQ：QBを求めよ。



〈考え方〉(1)は基本問題，(2)は$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$として$\overrightarrow{OQ}$を求めることから始まります。

自分で比を設定するのですよ

(解) (1) CP：PM＝s：$1-s$，BP：PD＝t：$1-t$とすると

△OCMについて. $\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OM}=(1-s)\dfrac{2\overrightarrow{OA}+1\overrightarrow{OB}}{1+2}+s\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\dfrac{2(1-s)}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2+s}{6}\overrightarrow{OB}$

△OBDについて $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OB}=(1-t)\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

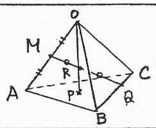
$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$は1次独立だから. $\dfrac{2(1-s)}{3}=\dfrac{2(1-t)}{5}$，$\dfrac{2+s}{6}=t$，$\therefore s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{4}{9}$ ∴ $\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{OB}$ //

(2) $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=k\left(\dfrac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{2k}{9}\overrightarrow{OA}+\dfrac{4k}{9}\overrightarrow{OB}$

Qは辺AB上にあるので $\dfrac{2k}{9}+\dfrac{4k}{9}=1$　$\therefore k=\dfrac{3}{2}$　よって$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\dfrac{1\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1}$

∴ AQ：QB＝2：1 //

四面体OABCにおいて，辺OAの中点をM，辺BCを2：1に内分する点をQ，線分MQの中点をRとし，直線ORと平面ABCの交点をPとする。$\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$で表せ。



〈考え方〉まずは$\overrightarrow{OR}$を求めます。前問と同様に$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$として$k$を求めます。

特定の面や断面に注目します。

(解) $\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{2+1}\right)=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}=\dfrac{k}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{k}{6}\overrightarrow{OB}+\dfrac{k}{3}\overrightarrow{OC}$

Pは平面ABC上にあるので $\dfrac{k}{4}+\dfrac{k}{6}+\dfrac{k}{3}=1$　$\therefore k=\dfrac{4}{3}$　$\therefore \overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{OB}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{OC}$ //