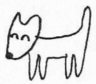
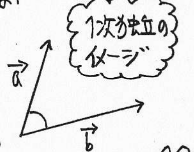
1次独立の話



今まで何気なく使ってきたベクトルは、ほとんどすべて1次独立でした。

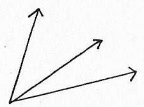


2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が、$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ であるとき
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立（*linearly independent*）であるといいます。
1次独立でないとき、1次従属（*linearly dependent*）であるといいます。

Vサイン
みたいや〜

(注)"線型独立""線型従属"ともいいます（大学では、この方が普通）。

(注) 3つ以上のベクトルが1次独立であることの定義は、また違います。
たとえば、同一平面上の3つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が図のような位置関係にある場合、



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立
$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は1次独立　ですが、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は1次独立ではありません!!
$\vec{c}$ と $\vec{a}$ は1次独立

▷Point◁（1次独立の性質①）

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立のとき、

$$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \iff s=t=0$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立でないとこんなことは成立しません。
たとえば、$\vec{a}$ と $2\vec{a}$（平行なので1次独立ではない）の場合、
$s\vec{a}+t(2\vec{a})=\vec{0}$ となる s, t は
$s=2$, $t=-1$, や $s=4$, $t=-2$ など
$s=t=0$ 以外にもたくさんあります。

（証明）背理法による。
$s \neq 0$ とすると、$s\vec{a}=-t\vec{b}$ より $\vec{a}=-\frac{t}{s}\vec{b}$
よってこのとき $t=0$ ならば、$\vec{a}=\vec{0}$ となり、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立であることに矛盾。
また、$t \neq 0$ ならば、$\vec{a} \parallel \vec{b}$ となり、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立であることに矛盾。
$\therefore s=0$
したがって、$t\vec{b}=\vec{0}$ となり、$\vec{b} \neq \vec{0}$ より $t=0$。　$\therefore s=t=0$ //

(注) 実は、この（1次独立の性質①）が1次独立であることの本来の定義です。
つまり、この性質をみたすベクトルのことを、1次独立なベクトルであるとするのです。
だから、「1次独立なので $s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$ ならば $s=t=0$」とするのは厳密には、ちょっと変です。

▷Point◁（1次独立の性質②）

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立のとき、

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \iff s=s',\ t=t'$$

このことは、つまり
両辺の $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数を比較してもよいことを意味しています。

（証明）$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$ より $(s-s')\vec{a}+(t-t')\vec{b}=\vec{0}$
ここで $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立なので上の性質①より、$s-s'=0$, $t-t'=0$
$\therefore s=s',\ t=t'$ //

▷Point◁（1次独立の性質③）

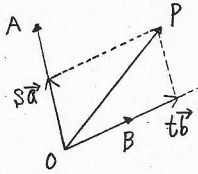
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ が1次独立のとき
平面OAB上の任意の点Pは

$$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad(s,\ t\ 実数)$$

という形に、ただ一通りに表現できる。

これは、先ほどの（1次独立の性質②）そのものです。

つまり、平面OAB上のどんな点Pも $\overrightarrow{OP}$ は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ をそれぞれ適当に伸び縮みして加えれば、作り出せることを意味しています。



$\overrightarrow{OP}$ が平行四辺形の対角線になるように $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を伸縮させるのです。
必ずできます。

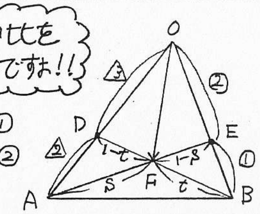
そりゃ
そうせな。

次に紹介する問題は、超重要な基本問題なので必ずマスターして下さい。

例題

$\triangle OAB$ において、辺OAを3:2に内分する点をD、辺OBを2:1に内分する点をEとし線分AE, BDの交点をFとする。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

（解）$\left.\begin{array}{l} AF:FE=s:(1-s) \\ BF:FD=t:(1-t) \end{array}\right\}$ とおく ---※ ← 自分で辺の比を設定するのですよ!!



$\triangle OAE$ において $\overrightarrow{OF}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OE}=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}$ ---①
$\triangle OBD$ において $\overrightarrow{OF}=t\overrightarrow{OD}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ ---②
①②より　$(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

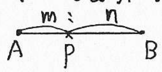
ここで $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立だから、$1-s=\frac{3}{5}t$, $\frac{2}{3}s=1-s$ ← 両辺の係数を比較したのです。
これらを解いて　$s=\frac{2}{3}$, $t=\frac{5}{9}$

必ず書くこと

$s=\frac{2}{3}$ を①に代入して、$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$ //

※について、なぜこのように設定してよいのでしょうね？

「ABを $m:n$ に内分する」

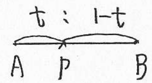


$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

同じ $\iff$「ABを $\frac{m}{m+n}:\frac{n}{m+n}$ に内分する」（和が1）

$\frac{m}{m+n}=t$ とおいただけ　同じことです。

同じ $\iff$「ABを $t:(1-t)$ に内分する」



$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

分母がないのでスッキリ

（別解）メネラウスの定理を利用して、sやtを求めることもできます。
$\triangle OAE$ と辺BDに対してメネラウスの定理より

$$\frac{DA}{OD}\cdot\frac{FE}{AF}\cdot\frac{BO}{EB}=1 \qquad \therefore \frac{2}{3}\cdot\frac{1-s}{s}\cdot\frac{3}{1}=1 \quad よって\ s=\frac{2}{3}\ （以下略）$$

⟶ 確かに一瞬でsの値が求まります。しかしメネラウスの定理がうまく使える場合なんてほとんどないので、あまりこの方法はオススメしません。あくまでも検算用として…