$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で表される点Pの存在範囲

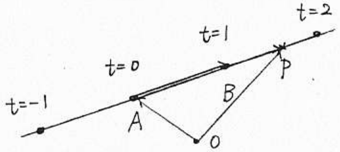
楽しい、楽しい
ぬり絵大会や〜

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が1次独立のとき、平面OAB上の任意の点Pの位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\quad (s,\ t\ 実数)$$

という形に、ただ一通りに表現されます。逆にsとtを自由に変化させると平面OAB上のすべての点を表すことができるのです。しかし、sとtに条件が加わると、点Pの存在範囲は、かなり限定されます。基本となるのは次の2つです。

基本① 点Pが直線AB上にある ⟺ $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ となる実数tが存在する。



$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ において、tをいろいろ変化させると、直線AB上の点がどんどん作り出されていく様子を表しています。点が集まって直線ができるという考え方です。

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ より

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$$

まさに、この式が2点A、Bを通る直線のベクトル方程式です。(通る点)＋t(方向ベクトル)の形になっています。

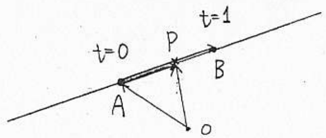
$$=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\underbrace{(1-t)}_{s\ とおく}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\quad (1-t=s)$$

$$=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\quad (s+t=1)$$

ほんまや〜

基本② 点Pが線分AB上にある ⟺ $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\ (0\leqq t\leqq 1)$ となるtが存在する。



$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ において
$\overrightarrow{AP}$ は $\overrightarrow{AB}$ を縮めたものなので
$0\leqq t\leqq 1$ となるのです。

"t"は、直線の目盛りのようなものであるという感覚をもてば、イメージしやすいでしょう。tのことを媒介変数(パラメータ)といいます。

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ より

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$$

tの条件が基本①と異なるだけで、このへんの式変形は全く同じ

$$=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\underbrace{(1-t)}_{s\ とおく}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\quad (1-t=s,\ 0\leqq t\leqq 1)$$

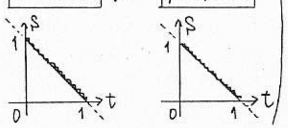
$$=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\quad (s+t=1,\ 0\leqq t\leqq 1)$$

※

$$=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\quad (s+t=1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$$

※について
なぜ、こうなるのかわかりますか？ sとtの条件をグラフに書けば全く同じ図になるからです。

$s+t=1$ $0\leqq t\leqq 1$	全く同じ	$s+t=1$ $s\geqq 0,\ t\geqq 0$



基本①と②をしっかりと区別しよう!!

は〜い

▷Point◁

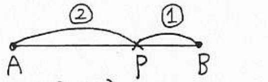
△OABにおいて、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とするとき、

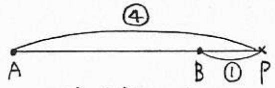
点Pが直線AB上にある ⟺ $s+t=1$ となる実数s、tが存在する。

点Pが線分AB上にある ⟺ $s+t=1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$ となるs、tが存在する。

この区別は完ぺき〜

(例) ABを2:1に内分する点P　　ABを4:1に外分する点Q





$$\overrightarrow{OP}=\frac{1\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1,\quad \frac{1}{3}\geqq 0,\ \frac{2}{3}\geqq 0$$

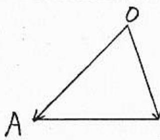
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{(-1)\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}}{4+(-1)}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=1$$

⟶ 点Pは線分AB上に、点Qは直線AB上に存在します。
確かに上の▷Point◁の条件をみたしていることがわかりますね。

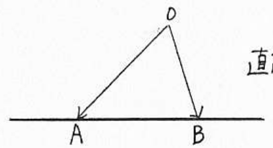
たしかに!!

△OABに対し、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。
実数s、tが次の条件をみたしながら動くとき、
点Pの存在範囲を図示せよ。



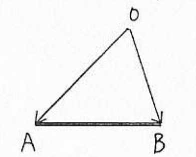
(1) $s+t=1$
(2) $s+t=1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$
(3) $s+t=2$
(4) $s+t=\frac{1}{3},\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$
(5) $2s+t=1$
(6) $3s+2t=6,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$

(解) (1) $s+t=1$



直線AB

(2) $s+t=1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$



線分AB

この2つは完ぺき〜

⟶(1)(2)は基本中の基本です。

(3) $s+t=2$

$$\frac{s}{2}+\frac{t}{2}=1$$

両辺を2で割って和が1になるように調整する。

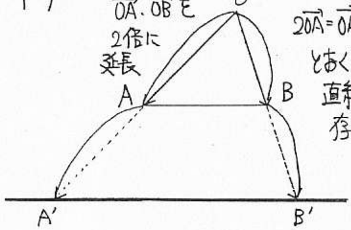
$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

$$=\underbrace{\frac{s}{2}\,2\overrightarrow{OA}+\frac{t}{2}\,2\overrightarrow{OB}}$$

和が1 ⟶ つまり、$2\overrightarrow{OA}$ と $2\overrightarrow{OB}$ の先っちょを通る!!

$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'},\ 2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと点Pは直線A'B'上に存在する。

$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$ を2倍に延長



ぼくものびる〜

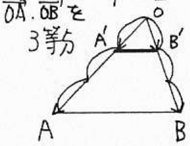
(4) $s+t=\frac{1}{3}$. $s\geqq0$. $t\geqq0$

$3s+3t=1$ ← 和が1になるように両辺を3倍

$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$

$=\underbrace{(3s)\frac{1}{3}\vec{OA}+(3t)\frac{1}{3}\vec{OB}}_{}$

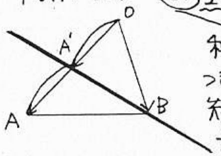
和が1 → つまり $\frac{1}{3}\vec{OA}$ と $\frac{1}{3}\vec{OB}$ の先っちょを通る!!



$\frac{1}{3}\vec{OA}=\vec{OA'}$, $\frac{1}{3}\vec{OB}=\vec{OB'}$ とすれば、$3s\geqq0$, $3t\geqq0$ より点Pは線分A'B'上に存在する。

(5) $2s+t=1$

$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}=\underbrace{(2s)\frac{1}{2}\vec{OA}+(t)\vec{OB}}_{}$



和が1
つまり $\frac{1}{2}\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ の先っちょを通る。
$\frac{1}{2}\vec{OA}=\vec{OA'}$ とすると
点Pは直線A'B上に存在する。

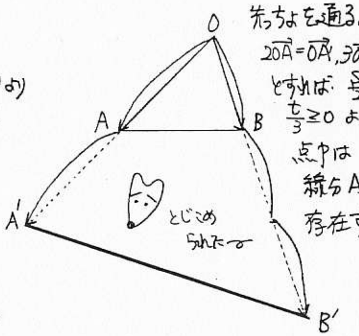
(6) $3s+2t=6$. $s\geqq0$. $t\geqq0$

$\frac{s}{2}+\frac{t}{3}=1$ ← 和を1にする。

$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$

$=\underbrace{\left(\frac{s}{2}\right)2\vec{OA}+\left(\frac{t}{3}\right)3\vec{OB}}_{}$

和が1 → つまり $2\vec{OA}$ と $3\vec{OB}$ の先っちょを通る。

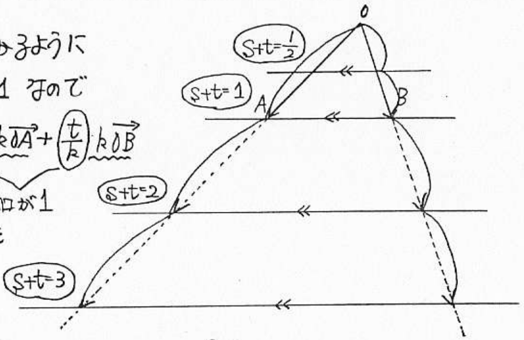


$2\vec{OA}=\vec{OA'}$, $3\vec{OB}=\vec{OB'}$ とすれば、$\frac{s}{2}\geqq0$, $\frac{t}{3}\geqq0$ より点Pは線分A'B'上に存在する。

上の例題の(3)(4)からもわかるように
$s+t=k$ のとき、$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$ なので

$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}=\underbrace{\left(\frac{s}{k}\right)k\vec{OA}+\left(\frac{t}{k}\right)k\vec{OB}}_{\text{和が1}}$

つまり $k\vec{OA}$ と $k\vec{OB}$ の先っちょを通ることになります。
$k\vec{OA}$ と $k\vec{OB}$ は $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ を k 倍に伸縮したものなので図のような平行線になります。
($s\geqq0$. $t\geqq0$ なら線分です)



平行線〜

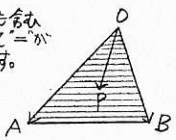
このことから、次のことがわかります。これは、とても重要です。

▷Point◁

$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ のとき

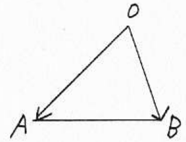
点Pが△OABの内部に存在する(辺上は含まない) $\Longleftrightarrow$ $0<s+t<1$, $s>0$, $t>0$

△OABの辺上も含む場合は、すべて"="がつきます。



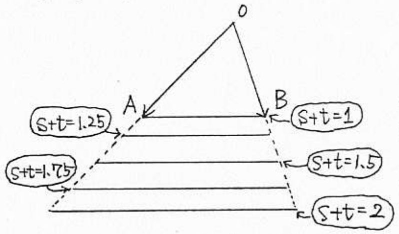
△OABに対し、$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ とする。
実数s, tが次の条件をみたしながら動くとき、
点Pの存在範囲を図示せよ。

今度は不等式やな〜 どんなんになるんやろ〜?

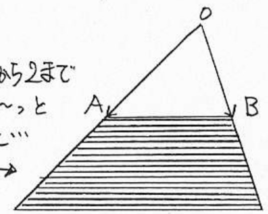


(1) $1\leqq s+t\leqq2$. $s\geqq0$. $t\geqq0$
(2) $1\leqq 2s+t\leqq2$
(3) $0\leqq s\leqq1$. $1\leqq t\leqq2$

(解) (1) $1\leqq s+t\leqq2$. $s\geqq0$. $t\geqq0$ ⟵ $s+t$ が1から2まで連続的に変化する。



$s+t$ を1から2まで一気にベタ〜っと変化させると…



($s\geqq0$. $t\geqq0$ なので辺上を含む内部になります。)

線が集まって面ができるのですね。

バーコードみたいや〜

(2) $1\leqq 2s+t\leqq2$

$2s+t=1$ のとき

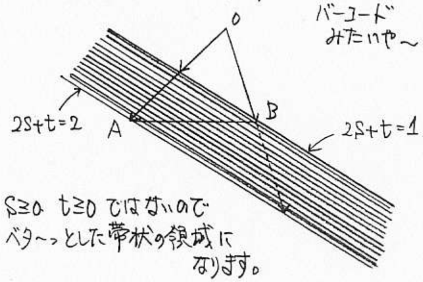
$\vec{OP}=(2s)\frac{1}{2}\vec{OA}+(t)\vec{OB}$

→ $\frac{1}{2}\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ の先っちょ通る。

$2s+t=2$ のとき　$s+\frac{t}{2}=1$ より

$\vec{OP}=(s)\vec{OA}+\left(\frac{t}{2}\right)2\vec{OB}$

→ $\vec{OA}$ と $2\vec{OB}$ の先っちょ通る。



$s\geqq0$　$t\geqq0$ ではないのでベタ〜っとした帯状の領域になります。

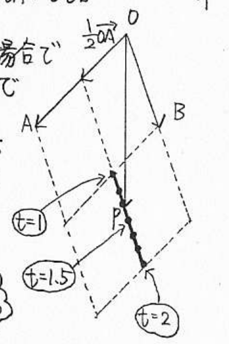
(3) $0\leqq s\leqq1$. $1\leqq t\leqq2$ ⟵ s と t の間に関係式が存在しません。つまり、s と t がそれぞれ独立に変化します。この場合、s か t のどちらか一方を固定して考えます。(1文字固定法)

$0\leqq s\leqq1$ なので、たとえば

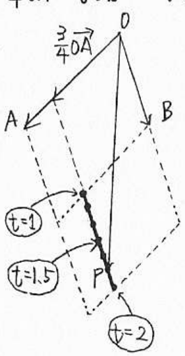
$s=\frac{1}{2}$ と固定すると
$\vec{OP}=\frac{1}{2}\vec{OA}+t\vec{OB}$

$s=\frac{3}{4}$ と固定すると
$\vec{OP}=\frac{3}{4}\vec{OA}+t\vec{OB}$

それぞれの s の場合で t を1から2まで変化させると、図の太線部にポツリポツリと点が表れます。

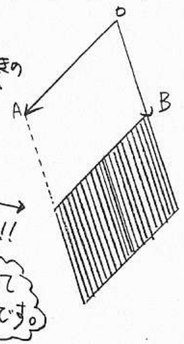


点が集まって線になるのです。



s を固定したときの点Pの動きがわかったので、いよいよ s も動かすと……

こうなります!!



線が集まって面になるのです。